Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia

SCUOLA DI DOTTORATO DI RICERCA in

“Meccanica Avanzata e Tecnica del Veicolo

Seminario

NOTE SULL’EQUAZIONE INTEGRALE DI BILANCIO DELL’ENERGIA MECCANICA

Modena, 7 Marzo 2011

Prof. Giovanni S. Barozzi

Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Civile

Università di Modena e Reggio Emilia

BEM-SOMMARIO

1. **Introduzione**
2. **Bilancio stazionario dell'Energia Meccanica (BEM)**
3. **Metodologie di derivazione**
4. **Richiami**
5. **BEM - Forma generale**
    a. **Derivazione meccanica**
    b. **Derivazione termodinamica**
6. **BEM - Forme stazionarie**
7. **Perdite di carico e irreversibilità**
8. **Conclusioni**

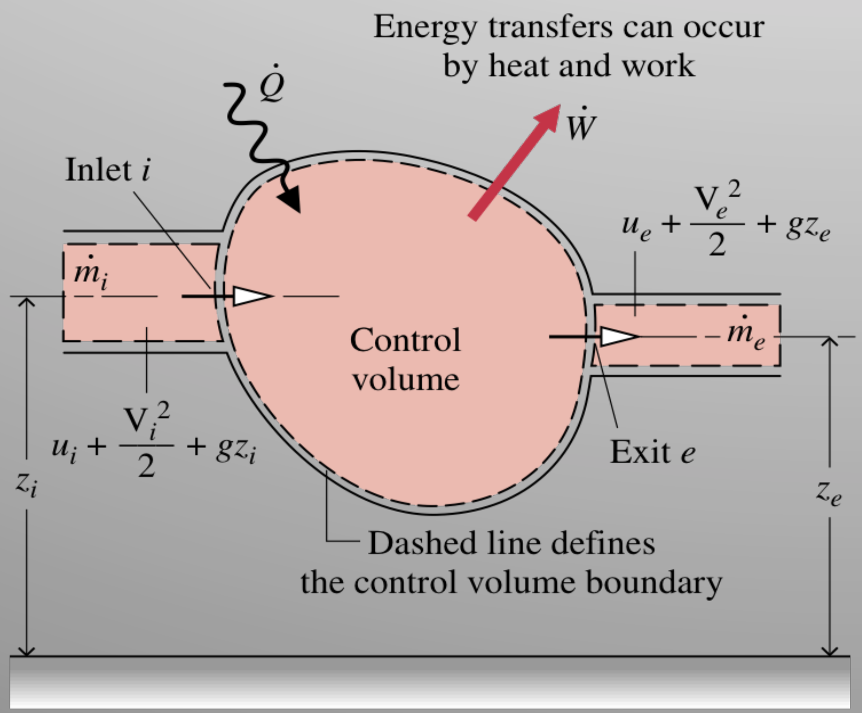
BEM.1 - INTRODUZIONE

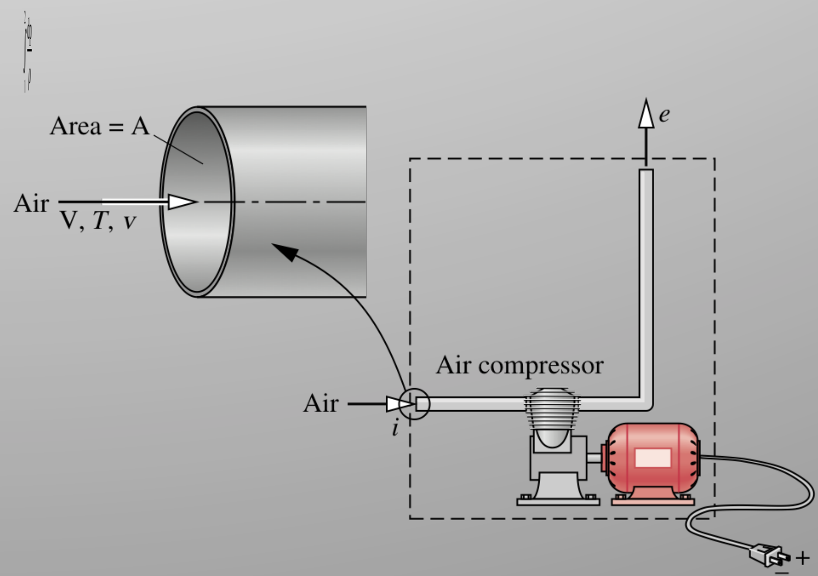
- **L'equazione integrale di bilancio dell'energia meccanica (BEM) è di fondamentale importanza pratica e di comune impiego nella tecnica**
- **Essa è introdotta nei corsi universitari nella forma stazionaria per sistemi a due correnti utilizzando i più svariati processi dimostrativi**
- **Le espressioni dell'equazione possono differire per dettagli significativi quali la presenza o meno di coefficienti correttivi, di macchine, di effetti di comprimibilità, di dissipazioni viscose (equazione di Bernoulli)**
- **Il significato di alcuni termini non è sempre chiaro e univoco**
- **A differenza delle analoghe equazioni di bilancio integrali (massa, energia, quantità di moto, etc) non si introducono le forme BEM a più correnti o non stazionarie**

BEM.2.1 – BILANCIO STAZIONARIO DELL'ENERGIA MECCANICA

BEM - Forma generale stazionaria per sistemi a due correnti

$$\alpha_2 \frac{W_2^2}{2} - \alpha_1 \frac{W_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + R = -l_e \qquad (4.1)$$





BEM.2.2 – BILANCIO STAZIONARIO DELL'ENERGIA MECCANICA

I termini compresi nella (4.1) rappresentano

- Variazione di energia cinetica (include i coefficienti α di correzione per disuniformità della velocità)
- Variazione di energia potenziale (gravità unica forza di massa)
- Quantità di lavoro di pressione eseguita sul fluido nel processo (inclusi i termini di introduzione ed estrazione e tenendo conto degli effetti di comprimibilità)
- Energia meccanica dissipata
- Lavoro unitario l_e scambiato da macchine a flusso continuo

Tutti i termini sono riferiti all'unità di massa

BEM.2.3 – BILANCIO STAZIONARIO DELL'ENERGIA MECCANICA

Quesiti aperti

- dove e quando si applica la (4.1)?
- come si calcola l'integrale $\int_1^2 \frac{dp}{\rho}$?
- i coefficienti α non sempre compaiono nell'espressione della (4.1)
- il lavoro unitario l_e non sempre compare nella derivazione della (4.1)
- la definizione di R non è univoca
- esistono forme BEM non stazionarie e più correnti?

BEM.3.1 – METODOLOGIE DI DERIVAZIONE

<u>Derivazione Meccanica (1)</u>

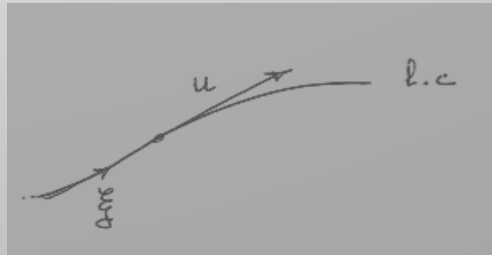
Equazione di Bernoulli lungo una linea di corrente (ξ)

$$a_{\xi} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial \xi} \qquad \sum_{1} F_{\xi,i} = m a_{\xi} \qquad \int \frac{\partial u}{\partial t} d\xi + \frac{u^2}{2} + g z + \int \frac{dp}{\rho} = C$$

(5.3)

$$\frac{W_2^2}{2} - \frac{W_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} = 0$$

(4.8)



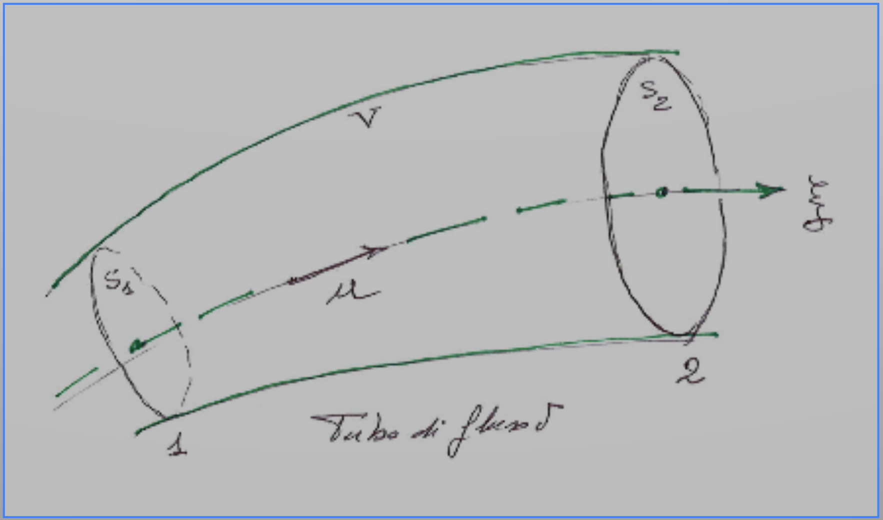
- si assume moto stazionario non viscoso
- si estende la (5.3) ad un tubo di flusso ad asse ξ
- non compaiono nell'espressione i coefficienti α, le perdite R, il lavoro unitario l_e
- occorre prescrivere che il moto sia irrotazionale (valore di C comune a tutte le linee di corrente)

Derivazione Meccanica (2)

Equazione di Navier-Stokes – proiezione lungo l'asse (ξ) di un tubo di flusso

$$\rho \frac{dW}{d\xi} W = -\rho g \frac{dz}{d\xi} - \frac{dp}{d\xi} + \mu \left[\nabla^2 u + \frac{1}{3} \nabla (\nabla . u) \right]_\xi \qquad (6.3)$$

$$\int_1^2 W dW + g \int_1^2 dz + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{\mu}{\rho} \int_1^2 \left[\nabla^2 u + \frac{1}{3} \nabla (\nabla . u) \right]_\xi d\xi = 0 \qquad (6.4)$$



BEM.3.3 – METODOLOGIE DI DERIVAZIONE

Derivazione Meccanica (2)

- si assume la componente di velocità secondo ξ pari al valor medio W sulla sezione S del t.d.f.

$$\frac{W_2^2}{2} - \frac{W_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + R = 0 \qquad (4.4)$$

$$R = \frac{\mu}{\rho}\int_1^2 \left[\nabla^2 u + \frac{1}{3}\nabla(\nabla . u)\right]_\xi d\xi \qquad (6.5)$$

- ➢ deve necessariamente essere α_1=α_1=1 e I_e=0
- ➢ la definizione di R non è generale

BEM.3.4 – METODOLOGIE DI DERIVAZIONE

Derivazione Termodinamica (1)

- **dall'equazione integrale di bilancio dell'energia**

$$\alpha_2 \frac{W_2^2}{2} - \alpha_1 \frac{W_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + h_2 - h_1 = q - l_e \qquad (7.4) \qquad h = u_{int} + pv$$

$$\alpha_2 \frac{W_2^2}{2} - \alpha_1 \frac{W_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} + R = -l_e \qquad (7.8)$$

$$R = u_{int,2} - u_{int,1} - q$$

- La (7.8) è immediata ma contraddittoria
- Non vale per fluido comprimibile

BEM.3.5 – METODOLOGIE DI DERIVAZIONE

Derivazione Termodinamica (2)

- **In alternativa si elabora Δh con il Tds**

$$h_2 - h_1 = q_{ir} + \int_{1,ir}^{2} vdp \qquad q = \int_1^2 Tds - \int_1^2 Tds_{Irr} \qquad q_{ir} = \int_1^2 Tds$$

$$h_2 - h_1 = q + \int_1^2 Tds_{Irr} + \int_{1,ir}^{2} vdp \qquad R = \int_1^2 Tds_{Irr}$$

$$\alpha_2 \frac{W_2^2}{2} - \alpha_1 \frac{W_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + R + \int_{1,ir}^{2} vdp = -l_e \qquad (7.16)$$

- Lo scambio termico deve essere nullo o reversibile

BEM.4.1 – RICHIAMI

Teorema della divergenza

L'integrale della divergenza del vettore **b** sul volume chiuso V è eguale al flusso scalare di **b** attraverso la superficie chiusa A che contorna V

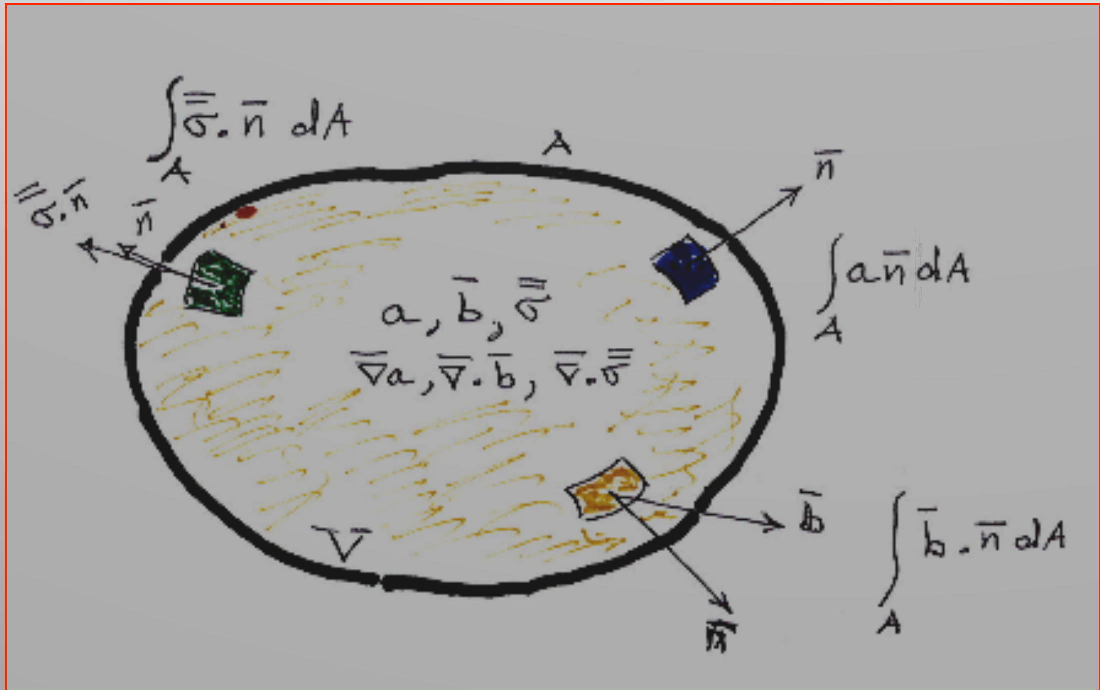
$$\int_V \nabla.\mathbf{b}\,dV = \int_A \mathbf{b}.\mathbf{n}\,dA \qquad (1.1)$$

L'integrale della divergenza del tensore **σ** sul volume chiuso V è eguale al flusso vettoriale di **σ** attraverso la superficie chiusa A che contorna V

$$\int_V \nabla.\sigma\,dV = \int_A \sigma.\mathbf{n}\,dA \qquad (1.2)$$

BEM.4.2 – RICHIAMI

Teorema della divergenza



$$\int_V \nabla a\, dV = \int_A a\mathbf{n}\, dA$$

$$\int_V \nabla.\mathbf{b}\, dV = \int_A \mathbf{b}.\mathbf{n}\, dA$$

$$\int_V \nabla.\sigma\, dV = \int_A \sigma.\mathbf{n}\, dA$$

BEM.4.3 – RICHIAMI

Formula di Leibnitz per sistemi fluidi

a = a(x,t) campo continuo sul volume V racchiuso dalla superficie di area A.

$\mathbf{u}_s$ velocità locale delle superfici delimitanti V

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_V \rho \mathrm{a}\,\mathrm{dV} = \int_V \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}(\rho \mathrm{a})\mathrm{dV} + \int_A \rho \mathrm{a}\left(u_s . n\right)\mathrm{dA} \qquad (1.3)$$

Se l'integrale è esteso ad un volume la cui superficie delimitante si muove ovunque con la velocità locale del fluido (sistema chiuso)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_V \rho \mathrm{a}\,\mathrm{dV} = \int_V \rho \frac{\mathrm{Da}}{\mathrm{Dt}}\mathrm{dV} \qquad (1.4)$$

BEM.4.4 – RICHIAMI

Teorema del trasporto di Reynolds

a = a(x,t) campo continuo sul volume V di un volume di controllo racchiuso dalla superficie A

V_{sc} volume di un sistema chiuso ausiliario coincidente con V all'istante di inizio osservazione

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_{\mathrm{Vsc}}\rho \mathrm{a}\,\mathrm{dV} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_{\mathrm{V}}\rho \mathrm{a}\,\mathrm{dV} + \int_{\mathrm{A}}\rho \mathrm{a}\left(u_{\mathrm{r}}\,.\,n\right)\mathrm{dA} =$$

$$= \int_{\mathrm{V}}\frac{\partial(\rho \mathrm{a})}{\partial \mathrm{t}}\mathrm{dV} + \int_{\mathrm{A}}\rho \mathrm{a}\left(u\,.\,n\right)\mathrm{dA} \qquad (1.5)$$

$\mathbf{u}_r$ = velocità relativa del fluido rispetto alle superfici del volume di controllo V; in corrispondenza di superfici impermeabili l'integrale esteso ad A si annulla

$\mathbf{u}_s$ = velocità delle superfici del volume di controllo V

$\mathbf{u}$ = velocità assoluta del fluido $\qquad u_{\mathrm{r}} = u - u_{\mathrm{s}}$

BEM.4.5 – RICHIAMI

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL MOTO DI UN FLUIDO

Equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathrm{t}} = -\left(\nabla . \rho u\right) \qquad \frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{Dt}} = -\rho\left(\nabla . u\right)$$

Equazione di conservazione della quantità di moto

$$\rho \frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{Dt}} = -\rho \nabla \psi - \nabla \mathrm{p} + \left[\nabla . \tau\right]$$

$$\rho \frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{Dt}} = \rho \frac{\partial u}{\partial \mathrm{t}} + \rho u . \nabla u \qquad \psi = \mathrm{gz}$$

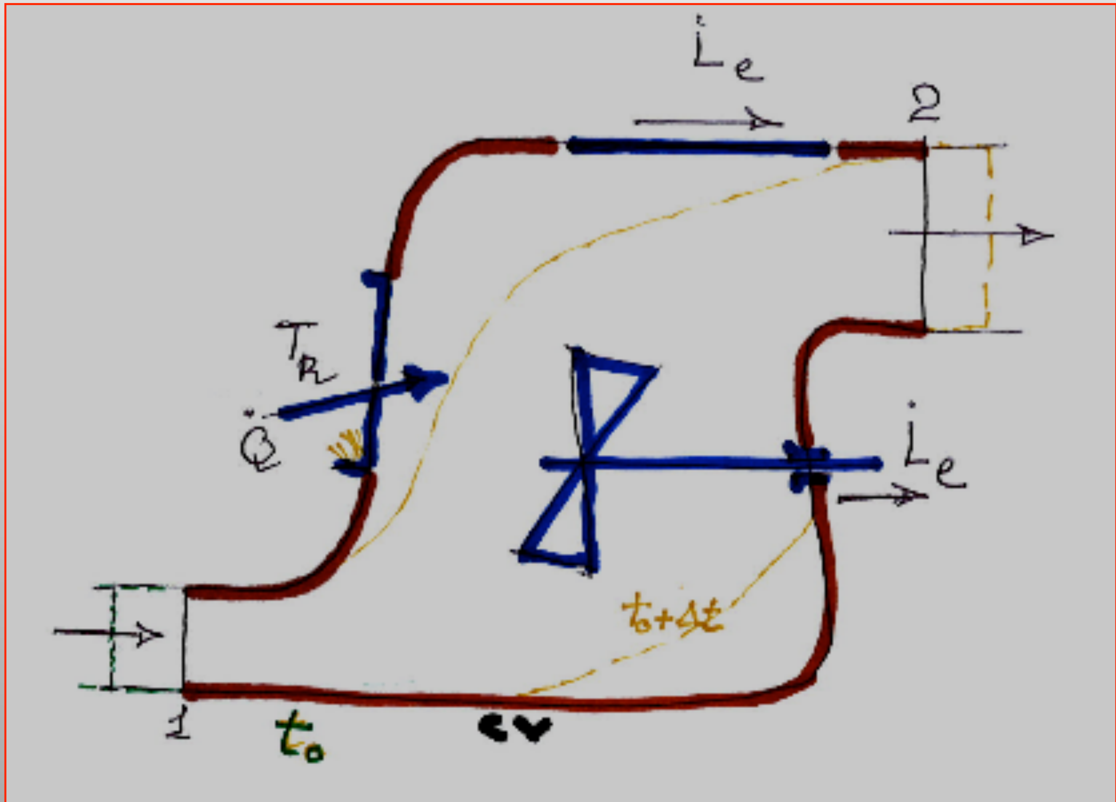
Equazione di Eulero (fluido non viscoso)

$$\rho \frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{Dt}} = -\rho \nabla \psi - \nabla \mathrm{p}$$

Equazione di Navier-Stokes per fluido a viscosità costante

$$\rho \frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{Dt}} = -\rho \nabla \psi - \nabla \mathrm{p} + \mu \left[\nabla^2 u - \frac{1}{3} \nabla(\nabla . u)\right]$$

a. Derivazione meccanica



Volume di controllo di riferimento

BEM.5.2 – BEM FORMA GENERALE/A

Bilancio integrale della quantità di moto

Equazione della quantità di moto per particella di massa costante, δm, e volume δV

$$\delta m \frac{du}{dt} = \rho \frac{du}{dt} \delta V = \sum_i dF_{i,locali}$$

Integrazione su V_{sc}

$$\int_{Vsc} \rho \frac{du}{dt} dV = \frac{d}{dt} \int_{Vsc} u\rho dV = \frac{d}{dt} \int_{V} u\rho dV + \int_{S} u\rho(u.n) dV = \sum_{i} F_i$$

$$\sum_{i} F_i = F_g + F_p + F_\tau \qquad F_g = \int_V \rho g dV \qquad F_p = \int_V -\nabla p dV = -\int_A p n dA$$

$$F_\tau = \int_V \nabla.\tau dV = \int_A \tau.n dA$$

Da qui l'equazione di bilancio di quantità di moto

BEM.5.3 – BEM FORMA GENERALE/A

Bilancio dell'energia meccanica

Moltiplicando scalarmente l'eq. della dinamica per **u** si ha l'equazione di bilancio dell'energia meccanica per una particella

$$\delta m\, u.\frac{du}{dt} = \rho \frac{d(u^2/2)}{dt}\delta V = \sum_i (u.dF_{i,locali})$$

Integrando sul volume del sistema chiuso, V_{sc}, e usando la formula di Leibnitz

$$\int_{Vsc} \rho \frac{d}{dt}\left(\frac{u^2}{2}\right) dV = \frac{d}{dt}\int_{Vsc} \rho\left(\frac{u^2}{2}\right) dV = \sum_i \int_V \left(u.dF_i\right) \qquad (8.9)$$

Si elabora il primo membro facendo uso del teorema del trasporto di Reynolds per il sistema chiuso ausiliario

$$\frac{d}{dt}\int_{Vsc} \rho\left(\frac{u^2}{2}\right) dV = \frac{d}{dt}\int_V \left(\rho \frac{u^2}{2}\right) dV + \int_A \rho \frac{u^2}{2}\left(u_r.n\right) dA$$

BEM.5.4 – BEM FORMA GENERALE/A

Bilancio dell'energia meccanica

$$\frac{d}{dt}\int_{Vsc}\rho\left(\frac{u^2}{2}\right)dV = \frac{d}{dt}\int_{V}\left(\rho\frac{u^2}{2}\right)dV + \int_{A}\rho\frac{u^2}{2}\left(u_r.n\right)dA =$$

$$= \frac{d}{dt}\int_{V}\left(\rho\frac{u^2}{2}\right)dV + \int_{As}\rho\frac{u^2}{2}\left(u_r.n\right)dA_s + \int_{S}\rho\frac{u^2}{2}\left(u_r.n\right)dS =$$

Termini p.m.

$$= \frac{d}{dt}\int_{V}\left(\rho\frac{u^2}{2}\right)dV + \quad 0 \quad + \alpha_2\frac{W_2^2}{2}Q_{m,2} - \alpha_1\frac{W_1^2}{2}Q_{m,1}$$

Gli integrali a s.m. della (8.9) rappresentano le quantità di lavoro svolte sul fluido nell'unità di tempo dalle forze di gravità, di pressione, di tensione viscosa

$$\dot{L}_g = -\int_V \rho\left(u.\nabla\psi\right)dV \qquad \dot{L}_p = -\int_V \left(u.\nabla p\right)dV \qquad \dot{L}_\tau = \int_V u.\left[\nabla.\tau\right]dV$$

$$\psi = -gz$$

BEM.5.5 – BEM FORMA GENERALE/A

Bilancio dell'energia meccanica (forma intermedia)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_V \frac{u^2}{2}\rho \mathrm{dV} + \alpha_2 \frac{W_2^2}{2} Q_{m,2} - \alpha_1 \frac{W_1^2}{2} Q_{m,1} = \dot{L}_g + \dot{L}_p + \dot{L}_\tau \tag{8.15}$$

Sviluppo dei termini di lavoro

Lavoro delle forze gravitazionali

$$\dot{L}_g = -\int_V \rho\left(u.\nabla\psi\right)\mathrm{dV} = -\int_V \nabla.\left(\rho u \psi\right)\mathrm{dV} + \int_V \psi \nabla.\left(\rho u\right)\mathrm{dV} =$$

$$= -\int_A \left[\rho u \psi\right].n\mathrm{dA} - \int_V \psi \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{dV} = -\int_A \rho\psi\left(u.n\right)\mathrm{dA} - \int_V \psi \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{dV} \tag{8.16}$$

Nello sviluppo della (8.16) si è fatto uso del teorema della divergenza, e, per quanto riguarda il secondo termine s.m., dell'equazione di continuità. Questo termine viene ulteriormente manipolato tramite la formula di Leibnitz applicata al CV, tenendo inoltre conto del fatto che il potenziale gravitazionale ψ non varia nel tempo

BEM.5.6 – BEM FORMA GENERALE/A

Sviluppo dei termini di lavoro

Lavoro delle forze gravitazionali

$$-\int_V \psi \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int_V \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial t} dV - \cancel{\int_V \rho \frac{\partial \psi}{\partial t} dV} = -\int_V \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial t} dV =$$

$$= -\frac{d}{dt}\int_V \rho\psi \, dV + \int_A \rho\psi(u_s.n) dA \qquad (8.17)$$

Sostituendo nella (8.16) ed introducendo la velocità relativa del fluido rispetto ai contorni ($\mathbf{u}_r = \mathbf{u} - \mathbf{u}_s$)

$$\dot{L}_g = -\int_A \rho\psi(u_r.n) dA - \frac{d}{dt}\int_V \rho\psi \, dV =$$

$$= -\int_S \rho\psi(u.n) dS - \cancel{\int_{As} \rho\psi(u_r.n) dA} - \frac{d}{dt}\int_V \rho\psi \, dV \qquad (8.18)$$

Il secondo termine s.m. della (8.18) è nullo in quanto ($\mathbf{u}_r = 0$) sulle superfici impermeabili.

BEM.5.7 – BEM FORMA GENERALE/A

Sviluppo dei termini di lavoro

Lavoro delle forze gravitazionali

$$\dot{L}_g = -Q_{m,2} g z_2 + Q_{m,1} g z_1 - \frac{d}{dt}\int_V \rho \psi \, dV \qquad (8.19)$$

Lavoro delle forze di pressione

$$\dot{L}_p = -\int_V (u.\nabla p)\,dV = -\int_V \nabla.(u p)\,dV + \int_V p(\nabla.u)\,dV =$$

$$= -\int_A p(u.n)\,dA + \int_V p(\nabla.u)\,dV =$$

$$-\int_S \frac{p}{\rho}(\rho u.n)\,dS - \int_{As} p(u.n)\,dA_s + \int_V p(\nabla.u)\,dV = \qquad (8.20)$$

$$= -Q_{m,2}\frac{p_2}{\rho_2} + Q_{m,1}\frac{p_1}{\rho_1} - \int_{As} p(u.n)\,dA_s + \int_V p(\nabla.u)\,dV$$

BEM.5.8 – BEM FORMA GENERALE/A

Sviluppo dei termini di lavoro

Lavoro delle forze gravitazionali

$$\dot{L}_g = -Q_{m,2} g z_2 + Q_{m,1} g z_1 - \frac{d}{dt}\int_V \rho \psi \, dV \qquad (8.19)$$

Lavoro delle forze di pressione

$$\dot{L}_p == -Q_{m,2}\frac{p_2}{\rho_2} + Q_{m,1}\frac{p_1}{\rho_1} - \int_{As} p(u.n)\,dA_s + \int_V p(\nabla .u)\,dV \qquad (8.20)$$

(a) (b) (c) (d)

- (a), (b) flussi attraverso le sezioni di uscita/ingresso della quantità (pv);
- (c) lavoro di reazione alla pressione svolto sul fluido nell'unità di tempo dalle pareti impermeabili entro o alla periferia del CV;
- (d) lavoro di compressione/espansione nell'unità di tempo

BEM.5.9 – BEM FORMA GENERALE/A

Sviluppo dei termini di lavoro

Lavoro delle forze viscose

$$\begin{aligned}\dot{L}_\tau &= \int_V u.[\nabla.\tau]\,dV = \int_V \nabla.[u.\tau]\,dV - \int_V \tau:\{\nabla u\}\,dV \\ &= \int_A [u.\tau].n\,dA - \int_V \tau:\{\nabla u\}\,dV = \\ &= \underbrace{\int_{As} [u.\tau].n\,dA}_{(a)} - \underbrace{\int_V \tau:\{\nabla u\}\,dV}_{(b)}\end{aligned} \qquad (8.21)$$

(a) lavoro di trascinamento svolto sul fluido nell'unità di tempo da pareti impermeabili mobili (esempio, parete scorrevole nel moto alla Couette);

(b) lavoro di deformazione svolto sul fluido nell'unità di tempo dalle tensioni viscose e dissipato irreversibilmente.

BEM.5.9 – BEM FORMA GENERALE/A

Sviluppo dei termini di lavoro

Lavoro delle forze viscose (termine (b))

$$\int_V \tau : \{\nabla u\} dV$$

Per fluido newtoniano la funzione integranda è correlata alla funzione di dissipazione Φ attraverso la viscosità μ

$$\Phi = 2\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2\right] +$$

$$+\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2$$

$$\tau : \{\nabla u\} = \mu\Phi$$

BEM.5.10 – BEM FORMA GENERALE/A

Sviluppo dei termini di lavoro

Lavoro delle forze gravitazionali

$$\dot{L}_g = -Q_{m,2} g z_2 + Q_{m,1} g z_1 - \frac{d}{dt}\int_V \rho\psi \, dV$$

Lavoro delle forze di pressione

$$\dot{L}_p = -Q_{m,2}\frac{p_2}{\rho_2} + Q_{m,1}\frac{p_1}{\rho_1} - \int_{As} p\left(u.n\right) dA_s + \int_V p\left(\nabla .u\right) dV$$

Lavoro delle forze viscose

$$\dot{L}_\tau = \int_{As}\left[u.\tau\right].n \, dA - \int_V \tau : \left\{\nabla u\right\} dV$$

BEM.5.11 – BEM FORMA GENERALE/A

BEM: forma finale

Sostituendo nella (8.15) le espressioni del lavoro

$$\frac{d}{dt}\int_V \frac{u^2}{2}\rho dV + \alpha_2 \frac{W_2^2}{2} Q_{m,2} - \alpha_1 \frac{W_1^2}{2} Q_{m,1} = -Q_{m,2} g z_2 + Q_{m,1} g z_1 - \frac{d}{dt}\int_V \rho\psi dV$$
$$-Q_{m,2}\frac{p_2}{\rho_2} + Q_{m,1}\frac{p_1}{\rho_1} - \int_{As} p(u.n)dA + \int_V p(\nabla .u)dV + \int_{As}[u.\tau].n\,dA - \int_V \tau:\{\nabla u\}dV$$

Riordinando

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\left(\frac{u^2}{2} + gz\right)dV + Q_{m,2}\left(\alpha_2 \frac{W_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho_2}\right) - Q_{m,1}\left(\alpha_1 \frac{W_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho_1}\right)$$
$$-\int_V p(\nabla .u)dV + \int_V \tau:\{\nabla u\}dV = -\int_{As} p(u.n)dA + \int_{As}[u.\tau].n\,dA$$

BEM.5.12 – BEM FORMA GENERALE/A

BEM: forma finale

(a) $$\frac{d}{dt}\int_V \rho\left(\frac{u^2}{2}+gz\right)dV$$

Variazione del contenuto di energia cinetica e potenziale entro V

(b) $$Q_{m,2}\left(\alpha_2\frac{W_2^2}{2}+gz_2+\frac{p_2}{\rho_2}\right)$$
$$-Q_{m,1}\left(\alpha_1\frac{W_1^2}{2}+gz_1+\frac{p_1}{\rho_1}\right)$$

Flussi di energia cinetica, potenziale e di pressione attraverso le sezioni di passaggio

(c) $$-\int_V p\left(\nabla . u\right)dV+\int_V \tau:\left\{\nabla u\right\}dV$$

Lavoro (reversibile) di compressione/espansione del fluido e di dissipazione viscosa (irreversibile) entro V

(d) $$-\int_{As} p\left(u.n\right)dA+\int_{As}\left[u.\tau\right].n\,dA$$

Lavoro delle pressioni e delle tensioni viscose trasmesso al fluido attraverso le pareti mobili

BEM.5.13 – BEM FORMA GENERALE/A

BEM: forma finale

Potenza meccanica scambiata

Convenzione termodinamica: il lavoro è positivo se trasferito dal sistema all'ambiente.
I termini (d) possono essere espressi come:

$$-\dot{L}_{ep} = -\int_{As} p(u.n)\, dA$$

$$-\dot{L}_{e\tau} = +\int_{As} [u.\tau].n\, dA$$

$$\dot{L}_{e} = \dot{L}_{ep} + \dot{L}_{e\tau}$$

L_{ep} = lavoro di pressione svolto dal fluido sulle pareti mobili di CV
$L_{e\tau}$ = lavoro di trascinamento svolto dal fluido sulle pareti mobili del CV
L_{e} = lavoro esterno complessivo svolto dal sistema sull'ambiente

Potenza meccanica dissipata

$$\dot{R} = \int_{V} \tau : \{\nabla u\}\, dV$$

BEM.5.13 – BEM FORMA GENERALE/A

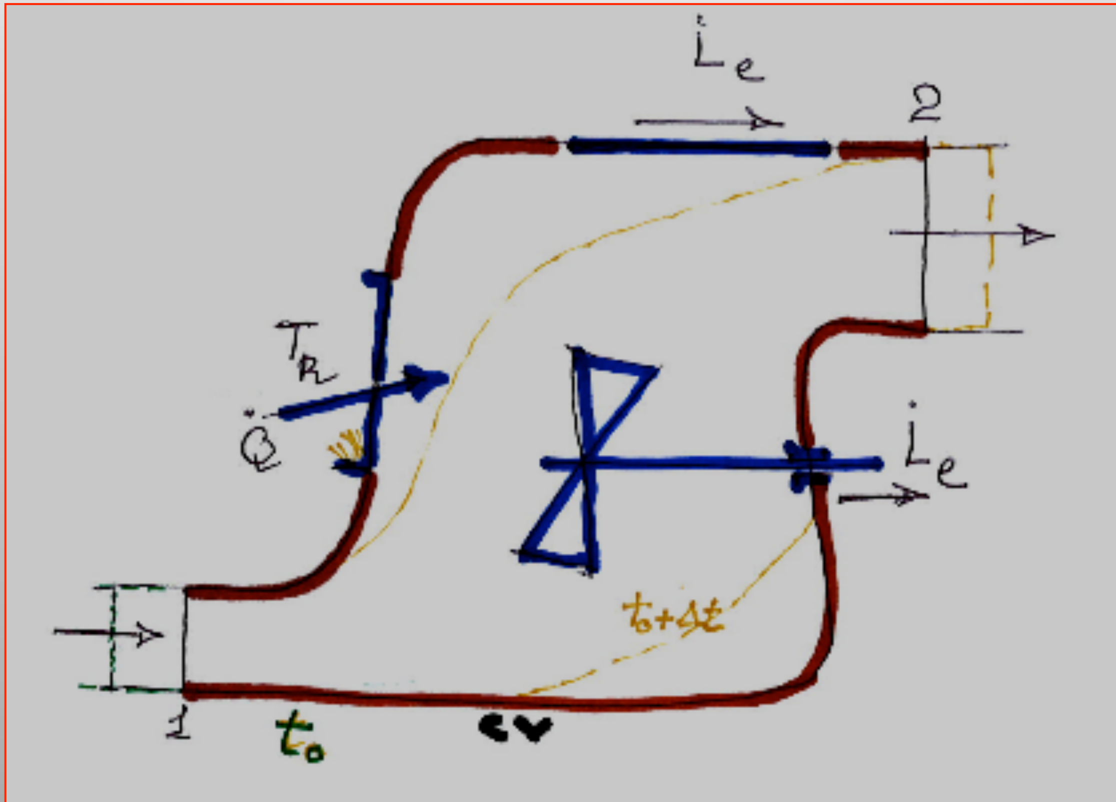
BEM: forma generale finale (8.30)

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\left(\frac{u^2}{2}+gz\right)dV + Q_{m,2}\left(\alpha_2\frac{W_2^2}{2}+gz_2+\frac{p_2}{\rho_2}\right) - Q_{m,1}\left(\alpha_1\frac{W_1^2}{2}+gz_1+\frac{p_1}{\rho_1}\right)$$

$$-\int_V p\left(\nabla . u\right)dV + \dot{R} = -\dot{L}_e$$

Non vi sono limitazioni al numero di correnti

b. Derivazione termodinamica



Volume di controllo di riferimento

BEM.5.15 – BEM FORMA GENERALE/B

Equazione generale di bilancio dell'energia per sistemi aperti

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho e\, dV + \int_A \left(\frac{p}{\rho} + e\right)\rho\left(u_r . n\right) dA = \dot{Q} - \dot{L}_e \qquad e = u_{int} + gz + \frac{u^2}{2}$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\left(gz + \frac{u^2}{2}\right) dV + \int_A \left(\frac{p}{\rho} + gz + \frac{u^2}{2}\right)\rho\left(u_r . n\right) dA +$$

$$\underset{*}{\frac{d}{dt}\int_V \rho u_{int} dV} + \underset{*}{\int_A u_{int}\rho\left(u_r . n\right) dA} = \dot{Q} - \dot{L}_e \qquad (9.1)$$

I termini (*) si elaborano mediante formula di Leibnitz, continuità, Tds

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho u_{int} dV + \int_A u_{int}\rho\left(u_r . n\right) dA = \ldots\ldots = \int_V \rho \frac{Du_{int}}{Dt} dV = \ldots\ldots = \int_V \rho T \frac{Ds}{Dt} dV - \int_V p\left(\nabla . u\right) dV$$

BEM.5.16 – BEM FORMA GENERALE/B

Per un sistema a due correnti si ha la seguente forma

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\left(gz+\frac{u^2}{2}\right)dV + Q_{m,2}\left(\alpha_2\frac{W_2^2}{2}+gz_2+\frac{p_2}{\rho_2}\right) - Q_{m,1}\left(\alpha_1\frac{W_1^2}{2}+gz_1+\frac{p_1}{\rho_1}\right)$$

$$-\int_V p\left(\nabla . u\right)dV + \int_V \rho T\frac{Ds}{Dt}dV = \dot{Q} - \dot{L}_e \tag{9.8}$$

Si elabora ora il termine che include l'entropia $\int_V \rho T\frac{Ds}{Dt}dV$

$$ds = \frac{\delta q}{T_R} + \delta s_{Irr}$$

$$Tds = \frac{T}{T_R}\delta q + T\delta s_{Irr} = \frac{T}{T_R}\delta q + \delta q - \delta q + T\delta s_{Irr} = \delta q - \left(\frac{T_R - T}{T_R}\right)\delta q + T\delta s_{Irr}$$

BEM.5.17 – BEM FORMA GENERALE/B

$$\dot{q} = \frac{\delta q}{dt}$$ velocità di trasferimento di calore per unità di massa

$$\dot{s}_{Irr} = \frac{\delta s_{Irr}}{dt}$$ velocità di produzione entropica per unità di massa

Con riferimento ad una particella in moto:

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{\dot{q}}{T} - \left(\frac{T_R - T}{T_R}\right)\frac{\dot{q}}{T} + \dot{s}_{Irr}$$

La variazione nell'unità di tempo dell'entropia di una particella elementare lungo la sua traiettoria si può interpretare come somma dei contributi:

- Flusso entropico reversibile per unità di massa
- Correzione al flusso entropico per irreversibilità termica ($T \neq T_R$)
- Velocità di produzione entropica per unità di massa (ingloba sia i contributi termici che i contributi di natura meccanica)

$\left(\frac{T_R - T}{T_R}\right)\frac{\dot{q}}{T}$ rappresenta la frazione termica di $\dot{s}_{Irr}$

BEM.5.18 – BEM FORMA GENERALE/B

BEM: forma finale

$$\int_V \rho T \frac{Ds}{Dt} dV = \int_V \rho \dot{q} dV - \int_V \rho \left(\frac{T_R - T}{T_R} \right) \dot{q} dV + \int_V \rho T \dot{s}_{Irr} dV \qquad \dot{Q} = \int_V \rho \dot{q} dV$$

Sostituendo nella (9.8) si ha la forma generale:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(gz + \frac{u^2}{2} \right) dV + Q_{m,2} \left(\alpha_2 \frac{W_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right) - Q_{m,1} \left(\alpha_1 \frac{W_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho_1} \right)$$

$$- \int_V p(\nabla . u) dV + \left[\int_V \rho T \dot{s}_{Irr} dV - \int_V \rho \left(\frac{T_R - T}{T_R} \right) \dot{q} dV \right] = -\dot{L}_e \qquad (9.16)$$

Coincidente con la (8.30) ponendo:

$$\dot{R} = \left[\int_V \rho T \dot{s}_{Irr} dV - \int_V \rho \left(\frac{T_R - T}{T_R} \right) \dot{q} dV \right]$$

BEM.6.1 – FORME STAZIONARIE

BEM – Forma stazionaria generale per sistemi a due correnti

Dalla (8.30) ponendo:

$$Q_{m,2} = Q_{m,1} = Q_m \qquad R = \frac{\dot{R}}{Q_m} \qquad l_e = \frac{\dot{L}_e}{Q_m}$$

$$\boxed{\left(\alpha_2 \frac{W_2^2}{2} + g z_2 + \frac{p_2}{\rho_2}\right) - \left(\alpha_1 \frac{W_1^2}{2} + g z_1 + \frac{p_1}{\rho_1}\right) - \frac{1}{Q_m}\int_V p\left(\nabla . u\right) dV + R = -l_e} \qquad (10.2)$$

* La (10.2) è la forma BEM più generale in presenza di macchine a flusso continuo operanti con fluido comprimibile

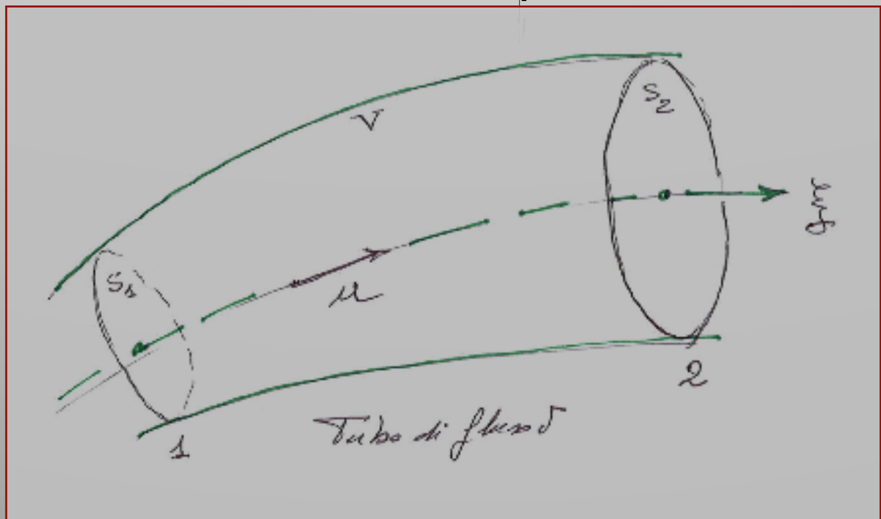
BEM.6.2 – FORME STAZIONARIE

BEM – Forma stazionaria per sistemi a tubo di flusso

Tubo di flusso monodimensionale:

regione nella quale è possibile individuare sezioni trasversali alla direzione principale del moto del fluido (ξ), lungo le quali la pressione e le altre proprietà termodinamiche si possano assumere uniformemente distribuite

$$p = p(\xi) \qquad \rho = \rho(\xi) = \frac{1}{v(\xi)}$$



BEM.6.3 – FORME STAZIONARIE

BEM – Forma stazionaria per sistemi a tubo di flusso

Integrale di (vdp)

Dall'equazione di continuità stazionaria $\nabla . u = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{v}\frac{Dv}{Dt} = \rho\frac{Dv}{Dt} = \rho u . \nabla v$

$$-\int_V p(\nabla . u)dV = -\int_V p\rho(u . \nabla v)dV$$

Dalle ipotesi di monodimensionalità

$$-\int_V \frac{p}{v}(u . \nabla v)dV = -\iint_{\xi\ S} \frac{p}{v} u_\xi \frac{dv}{d\xi} d\xi dS = -\iint_{\xi\ S} \frac{p}{v}(u . n)\frac{dv}{d\xi} d\xi dS =$$

$$-\int_S \rho(u . n)\left\{\int_\xi p\frac{dv}{d\xi}d\xi\right\}dS = -(\rho SW)\int_1^2 pdv = -Q_m\int_1^2 pdv$$

BEM.6.4 – FORME STAZIONARIE

BEM – Forma stazionaria per sistemi a tubo di flusso

Integrale di (vdp)

$$-\int_V \frac{p}{v}(u.\nabla v)\,dV = -Q_m \int_1^2 p\,dv$$

Sostituendo nella (10.2)

$$\left(\alpha_2 \frac{W_2^2}{2} + g z_2 + p_2 v_2\right) - \left(\alpha_1 \frac{W_1^2}{2} + g z_1 + p_1 v_1\right) - \int_1^2 p\,dv + R = -l_e$$

con

$$p_2 v_2 - p_1 v_1 - \int_1^2 p\,dv = \int_1^2 v\,dp$$

$$\boxed{\alpha_2 \frac{W_2^2}{2} - \alpha_1 \frac{W_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \int_1^2 v\,dp + R = -l_e} \qquad (4.1)$$

* La classica forma (4.1) risulta valida a rigore solo per sistemi o parti di sistema in cui è possibile individuare un tubo di flusso monodimensionale

BEM.7.1 – PERDITE DI CARICO E IRREVERSIBILITA'

R come integrale di ($T\delta s_{Irr}$) in sistemi a tubo di flusso

$$R = \frac{\dot{R}}{Q_m} = \frac{1}{Q_m}\left[\int_V \rho T \dot{s}_{Irr} dV - \int_V \rho \left(\frac{T_R - T}{T_R}\right)\dot{q} dV\right] \qquad (10.12)$$

Dalle ipotesi di monodimensionalità del tubo di flusso

- ρ, p uniformi sulla sezione S $\Rightarrow$ anche T uniforme su S $\Rightarrow$ T = T(ξ)
- T_R = temperatura di parete del tubo di flusso, uniforme sul perimetro di S $\Rightarrow$ $T_R = T_R(\xi)$

Sotto queste ipotesi, si può in qualche modo assumere che anche

$$\dot{q} = \dot{q}(\xi) \qquad \dot{s}_{Irr} = \dot{s}_{Irr}(\xi)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{R = \int_1^2 T ds_{Irr} - \int_1^2 \left(\frac{T_R - T}{T_R}\right) dq} \qquad (10.17)$$

BEM.7.2 – PERDITE DI CARICO E IRREVERSIBILITA'

R come integrale di ($T\delta s_{Irr}$) in sistemi a tubo di flusso

$$R = \int_1^2 T ds_{Irr} - \int_1^2 \left(\frac{T_R - T}{T_R} \right) dq \qquad (10.17)$$

* R coincide con integrale di Tds_{irr} solo se si annulla il termine in dq
Perché questo avvenga si deve verificare una delle condizioni seguenti :

- sistema adiabatico (dq = 0)
- reversibilità degli scambi di calore, consistente nell'imporre l'identità tra la temperatura del fluido e la temperatura del perimetro ad ogni sezione del tubo di flusso

BEM.8.1 – CONCLUSIONI

1. Le derivazioni dell'equazione integrale di bilancio dell'energia meccanica comunemente utilizzate sono tutte sostanzialmente insoddisfacenti.
2. Derivazioni di tipo meccanico:

- ✓ a differenza di quanto avviene per le altre equazioni di bilancio, le dimostrazioni meccaniche non partono da una forma differenziale dell'equazione dell'energia meccanica o da un'espressione dell'energia meccanica contenuta in un sistema chiuso, ma da una delle forme dell'equazione di bilancio di quantità di moto
- ✓ si riferiscono ai soli sistemi a tubo di flusso monodimensionale per i quali risulta impossibile l'inclusione di macchine
- ✓ l'equazione di bilancio della quantità di moto viene proiettata lungo l'asse del tubo di flusso e integrata tra gli estremi dello stesso
- ✓ l'operazione non è in grado di produrre i coefficienti di correzione dell'energia cinetica alle sezioni di ingresso ed uscita
- ✓ per fluido reale la procedura produce un'espressione della perdita di carico di dubbia validità
- ✓ per fluido ideale il risultato è l'equazione di Bernoulli la cui estensione al caso di fluido reale si esegue poi per via intuitiva

BEM.8.2 – CONCLUSIONI

3. Derivazioni di tipo termodinamico:

- ✓ si basano sull'eliminazione dei termini di calore scambiato e di entalpia dall'equazione integrale di bilancio dell'energia
- ✓ nel caso di fluido incomprimibile portano a risultati convincenti e corretti
- ✓ per fluido incomprimibile è anche direttamente ricavabile la forma generale non stazionaria e per sistemi a più correnti
- ✓ per fluidi comprimibili, l'introduzione del termine integrale è fonte di confusione non venendo mai esplicitato chiaramente il fatto che l'esistenza dell'integrale di pressione implica l'ipotesi di sistema a tubo di flusso monodimensionale
- ✓ le perdite di carico sono espresse in termini di produzione irreversibile di entropia, la cui relazione con la perdita di energia meccanica non è mai trattata in modo completo e convincente

4. Le ambiguità insite nelle derivazioni tradizionali stazionarie sono risolte completamente attraverso approcci sistematici e rigorosi che partono dall'integrazione diretta sul volume di controllo dell'equazione differenziale dell'energia meccanica o, in alternativa, dalla forma generale dell'equazione di bilancio dell'energia per sistemi aperti

BEM – FINE

SE SIETE ARRIVATI FIN QUI, COMPLIMENTI !!

E

GRAZIE PER L'ATTENZIONE