Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia

SCUOLA DI DOTTORATO DI RICERCA
in
“Meccanica Avanzata e Tecnica del Veicolo”

Lezioni e Seminari

NOTE SULL’EQUAZIONE INTEGRALE DI BILANCIO DELL’ENERGIA MECCANICA

Giovanni S. Barozzi
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Civile,
Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia

Modena, 07 Marzo 2011

ABSTRACT

Si esamina criticamente la nota equazione integrale di bilancio dell’energia meccanica (BEM), richiamando le diverse procedure di derivazione dell’equazione reperibili nella manualistica universitaria e rilevandone limiti ed incongruenze.

Si descrivono poi due procedure di derivazione dell’equazione in forma completa e instazionaria, l’una a partire dall’equazione di bilancio dell’energia meccanica per un volume chiuso, l’altra mediante trasformazione dell’equazione generale di bilancio dell’energia per sistemi aperti. La forma generale viene poi semplificata per ottenere le usuali formulazioni stazionarie dell’equazione.

1. MOTIVAZIONI E SCOPI

L’equazione di bilancio dell’energia meccanica per sistemi fluidi in moto attraverso un volume di controllo (VC) costituisce una delle equazioni più note e di più diffuso impiego della fluidodinamica applicata. Essa, in una forma o nell’altra, viene introdotta già nei corsi di Fisica delle Scuole Secondarie Superiori, e, per quanto riguarda gli insegnamenti universitari delle Facoltà di Ingegneria, viene trattata o impiegata più o meno diffusamente nei corsi che fanno riferimento alle aree disciplinari di Idraulica, Fluidodinamica, Fisica Tecnica, Macchine, Impianti Meccanici, Impianti Chimici.

L’equazione, nelle forme stazionarie correntemente usate, non pare a prima vista presentare particolari problemi interpretativi o applicativi. Probabilmente per questo motivo essa viene raramente discussa in modo approfondito e generale. Ciò tuttavia limita automaticamente le possibilità di utilizzo del notevole potenziale che l’equazione possiede quando occorra operare su problemi fluidodinamici non elementari.

D’altro canto, un aspetto peculiare dell’equazione nella sua forma stazionaria risiede nel fatto che essa può essere derivata attraverso differenti procedure, tutte comunque riconducibili a due tipologie: la prima, che designeremo “meccanica”, prevede procedimenti dimostrativi che prendono origine dalle equazioni fondamentali del moto e ne producono un’integrazione diretta sul volume di controllo prescelto; la seconda, che designeremo “termodinamica”, comprende metodologie basate sull’equazione integrale di bilancio dell’energia per sistemi aperti, dalla quale si eliminano i termini di entalpia e calore mediante l’uso di relazioni termodinamiche.
Nel primo caso, dato che la derivazione prevede la considerazione di un tratto di tubo di flusso quale volume di controllo, l’equazione non contiene il termine di lavoro meccanico. Inoltre la derivazione, molto semplice nel caso di fluido ideale (equazione di Bernoulli), diventa abbastanza laboriosa quando si vogliano includere le perdite di carico. Le derivazioni di tipo “meccanico”, infine, non contemplano i coefficienti di correzione del flusso di energia cinetica alle sezioni di ingresso-uscita del volume di controllo. Tali coefficienti tengono conto della possibile presenza di disuniformità della velocità sulle sezioni di passaggio e compaiono naturalmente nell’equazione generale di bilancio dell’energia per sistemi aperti.
I problemi sopra evidenziati sono automaticamente risolti nelle procedure di tipo “termodinamico”, ciò che fa apparire questa tipologia di procedura più corretta, completa ed affidabile. Per operare la richiesta trasformazione dell’equazione generale di bilancio dell’energia, si deve tuttavia far ricorso ad alcune relazioni fondamentali della termodinamica delle quali è necessario rispettare con precisione i presupposti. Questo, come si vedrà, non sempre avviene nelle derivazioni presentate nei testi di corrente uso e può essere fonte di dubbi ed incertezze in merito al significato e all’uso dell’equazione.

Si ricava quindi l’equazione integrale di bilancio dell’energia meccanica, qui denominata sinteticamente BEM, in formulazione generale, vale a dire non stazionaria ed atta al trattamento di volumi di controllo deformabili e a più correnti. La derivazione dell’equazione è svolta sia con approccio meccanico che con approccio termodinamico.
Dalla forma generale si estraggono poi le formulazioni stazionarie, con lo scopo di mettere meglio in luce il significato di alcuni dei termini che compaiono nell’equazione e di evidenziare i limiti di impiego delle usuali forme stazionarie dell’equazione di bilancio dell’energia meccanica.

La trattazione si propone di motivare gli studenti della Scuola di Dottorato all’approfondimento del significato di un’equazione di grandissima utilità pratica, ma forse troppo spesso banalizzata nell’uso.

2. SIMBOLOGIA, ABBREVIAZIONI, NOTAZIONI E RICHIAMI

Simbologia

A	area totale della superficie che racchiude il volume di controllo CV
A_s	frazione impermeabile della superficie A
a	accelerazione
c_p	calore specifico a pressione costante
c_v	calore specifico a volume costante
$\mathbf{g}$	vettore accelerazione di gravità
g	modulo dell'accelerazione di gravità
h	entalpia specifica
$\dot{L}$	potenza meccanica
$\dot{L}_e$	potenza meccanica scambiata attraverso le pareti impermeabili del volume di controllo
$\dot{L}_{ep}$	frazione di $\dot{L}_e$ scambiata per azione delle pressioni
$\dot{L}_{e\tau}$	frazione di $\dot{L}_e$ scambiata per azione delle tensioni di natura viscosa
$\dot{L}_g$	potenza sviluppata dalle forze gravitazionali sul CV
$\dot{L}_p$	potenza sviluppata dalle forze di pressione sul CV
$\dot{L}_\tau$	potenza sviluppata dalle forze viscose sul CV
L	lavoro
l_e	lavoro esterno per unità di massa
m	massa
$\mathbf{n}$	versore della normale esterna ad A
p	pressione
Q	quantità di calore
$\dot{Q}$	potenza termica
q	quantità di calore per unità di massa
Q_m	portata in massa
Q_v	portata in volume
$\dot{R}$	potenza meccanica dissipata entro il volume di controllo
R	perdita di carico o energia meccanica dissipata per unità di massa
S	area della/e sezione/i di passaggio del fluido
	entropia
s	entropia specifica
T	temperatura termodinamica
T_R	temperatura termodinamica di serbatoio
t	tempo
$\mathbf{u}$	vettore velocità
u_x, u_y, u_z	componenti cartesiane del vettore velocità
$\mathbf{u}_r$	velocità relativa del fluido rispetto alle superfici del volume di controllo
$\mathbf{u}_s$	velocità delle superfici di contorno del volume di controllo
u	modulo del vettore velocità,
u_{int}	energia interna specifica
V	volume
V_{sc}	volume del sistema chiuso ausiliario
v	volume specifico

W velocità media sulla sezione di passaggio del fluido
z quota o quota baricentrica rispetto ad un riferimento arbitrario
x,y,z coordinate cartesiane

α coefficiente di correzione per il flusso di energia cinetica attraverso la sezione S
μ viscosità dinamica del fluido
ν viscosità cinematica del fluido
$\boldsymbol{\pi}$ tensore delle pressioni
ω vorticità
ρ densità
$\boldsymbol{\tau}$ tensore degli sforzi viscosi
$\boldsymbol{\xi}$ versore della coordinata curvilinea corrente ξ
ξ coordinata curvilinea corrente

Indici
1 relativo alla sezione di ingresso
2 relativo alla sezione di uscita
1-2 tra sezione 1 e sezione 2
f istante finale
i istante iniziale
in, out ingresso, uscita
ir internamente reversibile (o invertibile)
N numero correnti in ingresso
rev reversibile
SC sistema chiuso

Abbreviazioni
BEM equazione di bilancio dell'energia meccanica per sistemi aperti
CV volume di controllo
l.d.c. linea di corrente

Operatori
Δ variazione di una grandezza
$\frac{Da}{Dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla a$ derivata sostanziale dello scalare a
$\frac{D\mathbf{b}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla \mathbf{b}$ derivata sostanziale del vettore **b**

∇ operatore vettoriale nabla
∇^2 operatore vettoriale laplaciano
∇a gradiente dello scalare a
$\nabla.\mathbf{b}$ divergenza del vettore **b**
$\nabla \times \mathbf{b}$ rotore del vettore **b**
$\nabla\mathbf{b}$ tensore da prodotto diadico di ∇ e del vettore **b**
$\nabla^2 \mathbf{b}$ laplaciano del vettore **b**

Operazioni vettoriali e tensoriali (da [1] App. A)

	operazione:	*risultato:*
$(\mathbf{b}.\mathbf{c})$	prodotto scalare di vettori	scalare
$(\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\tau})$	prodotto scalare di tensori	scalare
$[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]$	prodotto vettoriale di vettori	vettore
$[\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{b}]$	prodotto vettoriale di un tensore e di un vettore	vettore
$\{\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\tau}\}$	prodotto tensoriale di tensori	tensore

Definizioni e relazioni

$\mathbf{u}_r = \mathbf{u} - \mathbf{u}_s$ velocità relativa del fluido rispetto alle superfici del sistema chiuso ausiliario

$W = \frac{1}{S}\int_S (\mathbf{u}.\mathbf{n})\,dS$ velocità media sulla sezione S

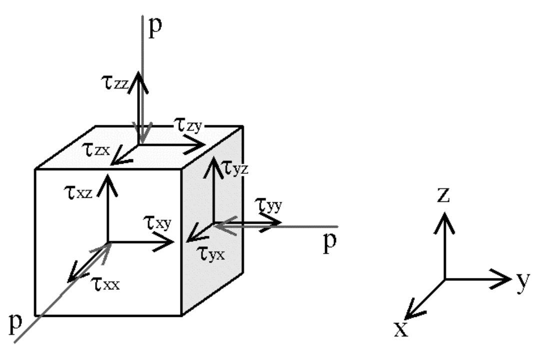
$Q_m = \rho Q_v = \rho W S$ relazione tra portata in massa, portata in volume, velocità media

$\alpha = \frac{1}{W^3 S}\int_S u^2(\mathbf{u}.\mathbf{n})\,dS$ coefficiente correttivo per il flusso di energia cinetica su S

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{vmatrix}$$ tensore delle pressioni

$-\nabla p = \nabla \boldsymbol{\pi}$ risultante delle pressioni

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{vmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{vmatrix}$$ tensore degli sforzi viscosi



Richiami

Fluidi e moti ideali

Non vi è assoluta concordanza in letteratura tra le diverse definizioni e concetti, relativamente a ciò che si intende per “fluido ideale”.
In termini generali, il concetto implica l’assenza di effetti dovuti alla viscosità, da cui deriva che le perdite di carico, in quanto derivanti direttamente o indirettamente dagli effetti viscosi, sono per definizione nulle. A questo concetto generale si farà riferimento nel seguito.
Spesso il concetto di fluido ideale viene fatto coincidere con il concetto di fluido non viscoso (*inviscid fluid*), vale a dire fluido a viscosità nulla ($\mu = 0$). Questa condizione è più restrittiva della precedente, infatti ([12], p.481), il moto di un fluido può risultare di tipo non viscoso (*inviscid flow* o *frictionless flow*) pur essendo non-nulla la viscosità del fluido. Ciò avviene ogni qualvolta la risultante delle forze d’attrito è trascurabile rispetto a quella delle forze d’inerzia. Non necessariamente le singole componenti di tensione viscosa sono nulle in questi casi, pur fornendo risultante nulla. D’altra parte, il semplice annullarsi della risultante delle tensioni viscose non implica in alcun modo l’assegnazione al fluido delle caratteristiche di fluido ideale (si pensi ad esempio al moto alla Couette).

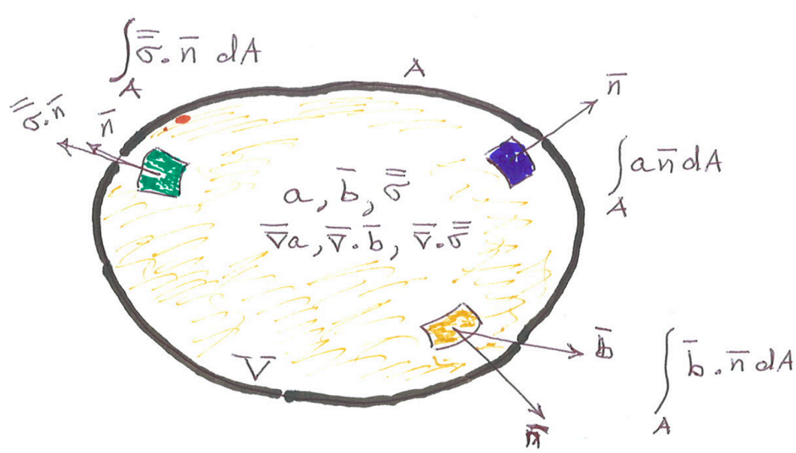
Teorema della divergenza (Gauss-Ostrogradskii)

L’integrale della divergenza del vettore **b** sul volume chiuso V è eguale al flusso scalare di b attraverso la superficie chiusa A che contorna V:

$$\int_V \nabla.\mathbf{b}\,dV = \int_A \mathbf{b}.\mathbf{n}\,dA \qquad (1.1)$$

L’integrale della divergenza del tensore $\boldsymbol{\sigma}$ sul volume chiuso V è eguale al flusso vettoriale di $\boldsymbol{\sigma}$ attraverso la superficie chiusa A che contorna V:

$$\int_V \nabla.\boldsymbol{\sigma}\,dV = \int_A \boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n}\,dA \qquad (1.2)$$



Formula di Leibnitz per sistemi fluidi

Dato un campo continuo di una quantità funzione dello spazio e del tempo, a = a(x,t), sul volume V racchiuso dalla superficie di area A, detta $\mathbf{u}_s$ la velocità locale delle superfici delimitanti V, si ha:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho a\, dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho a)\, dV + \int_A \rho a(u_s.n)\, dA \qquad (1.3)$$

Se l'integrale è esteso ad un volume la cui superficie delimitante si muove ovunque con la velocità locale del fluido (sistema chiuso), si ha ([1], p.775):

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho a\, dV = \int_V \rho \frac{Da}{Dt} dV \qquad (1.4)$$

Teorema del trasporto di Reynolds

Dato un sistema fluido aperto a volume V, racchiuso dalla superficie S, ed un sistema chiuso ausiliario a volume V_{sc}, coincidente con V all'istante t di inizio osservazione, considerata una quantità generica (a), funzione dello spazio e del tempo, si ha:

$$\frac{d}{dt}\int_{Vsc} \rho a\, dV = \frac{d}{dt}\int_V \rho a\, dV + \int_A \rho a(u_r.n)\, dA = \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho a)\, dV + \int_A \rho a(u.n)\, dA \qquad (1.5)$$

ove $\mathbf{u}_r$ rappresenta la velocità relativa del fluido rispetto alle superfici del volume di controllo V che si muovono con velocità $\mathbf{u}_s$:

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u} - \mathbf{u}_s \qquad (1.6)$$

In corrispondenza di superfici impermeabili l'integrale esteso ad A si annulla, infatti si ha ($\mathbf{u}_r = 0$) se il fluido aderisce alle pareti, e ($\mathbf{u}_r.\mathbf{n} = 0$) se il fluido non aderisce alle pareti.

La relazione (1.5) si può dimostrare per via diretta o mediante l'uso della formula di Leibnitz ([12], pp.148-155).

Processi reversibili e irreversibili - Equazioni del Tds

Le equazioni dette del Tds sono forme semplificate dell'equazione di Gibbs ([15], p.99), relative a sistemi termodinamici semplici. Esse correlano stati di equilibrio termodinamico infinitamente prossimi.

In forma specifica le equazioni del Tds si scrivono:

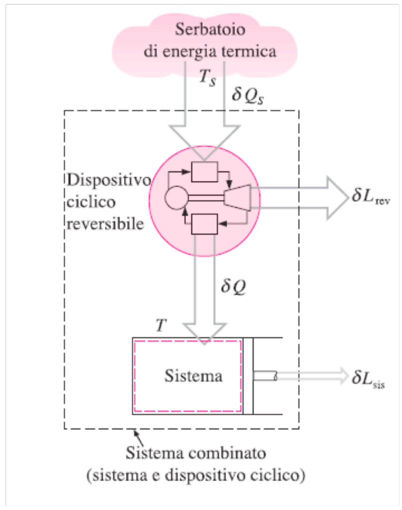
$$Tds = du_{int} + pdv \qquad (1.7)$$

$$Tds = dh - vdp \qquad (1.8)$$

Le (1.7) (1.8) si possono utilizzare a prescindere dal processo che eventualmente congiunga i due stati infinitamente prossimi.

La definizione di entropia specifica si basa sulla considerazione di un processo reversibile svolto da un sistema in combinazione con un serbatoio R alla temperatura T_R. In termini infinitesimi, si ha:

$$ds = \left.\frac{\delta q}{T_R}\right|_{rev} \quad (1.9)$$



Per un processo reale, irreversibile, in cui si scambia la quantità di calore per unità di massa δq con il serbatoio R, si ha invece:

$$ds = \frac{\delta q}{T_R} + \delta s_{irr} \quad (1.10)$$

essendo δs_{irr} la quantità di entropia prodotta irreversibilmente per unità di massa.

Per i soli processi reversibili le (1.7) (1.8) coincidono con formulazioni del primo principio della termodinamica per sistemi semplici, dato che, in tal caso:

$$\begin{aligned} \delta q &= Tds \\ \delta l_e &= pdv \end{aligned} \quad (1.11)$$

da cui:

$$\delta q = Tds = du_{int} + pdv \quad (1.12)$$

$$\delta q = Tds = dh - vdp \quad (1.13)$$

3. EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL MOTO DI UN FLUIDO

Equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla . \rho \mathbf{u}) \tag{3.1}$$

La (3.1) può scriversi in forma equivalente come

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla . \mathbf{u}) \tag{3.2}$$

Per fluido incomprimibile le (3.1) (3.2) si riducono a

$$\nabla . \mathbf{u} = 0 \tag{3.3}$$

Equazione di conservazione della quantità di moto (equazione di Cauchy)

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\rho \nabla \psi - \nabla p + [\nabla . \tau] \tag{3.4}$$

Dalla (3.4) si ricavano, attraverso le appropriate equazioni costitutive, le equazioni di Navier-Stokes per fluidi newtoniani. Il termine gravitazionale $\rho\mathbf{g}$ è espresso come gradiente del potenziale gravitazionale ψ, ove z è una coordinata parallela al vettore g ed orientata in opposizione ad esso.

$$\psi = gz \tag{3.5}$$

Equazione di Eulero (fluido non viscoso)

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\rho \nabla \psi - \nabla p \tag{3.6}$$

Equazione di Navier-Stokes per fluido a viscosità costante

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\rho \nabla \psi - \nabla p + \mu\left[\nabla^2 \mathbf{u} - \frac{1}{3}\nabla(\nabla . \mathbf{u})\right] \tag{3.7}$$

Equazione di Navier-Stokes per fluido a viscosità e densità costanti

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\rho \nabla \psi - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \tag{3.8}$$

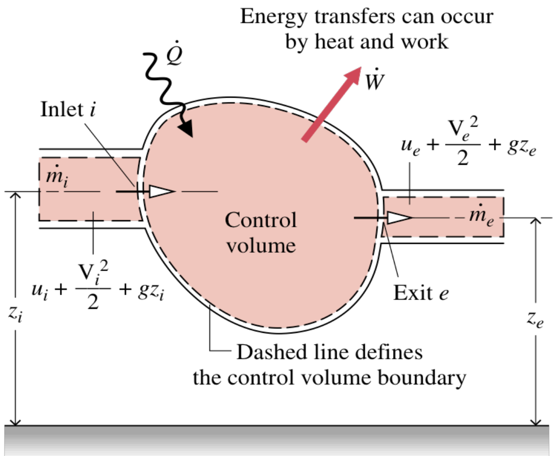
Derivata sostanziale e laplaciano della velocità

$$\mathbf{u}.\nabla \mathbf{u} = \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{u}.\mathbf{u}) - [\mathbf{u}x[\mathbf{u}x\mathbf{u}]] \tag{3.9}$$

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla . \mathbf{u}) - [\mathbf{u}x[\nabla x\mathbf{u}]] \tag{3.10}$$

4. EQUAZIONE BEM: FORME TIPICHE

Si elencano le forme stazionarie dell'equazione BEM che vengono normalmente presentate nei trattati universitari. Tali forme si riferiscono a condotti a sistemi detti a due correnti, caratterizzati cioè dalla presenza di una sola sezione di ingresso ed una sola sezione di uscita, con eventuale presenza di macchine motrici o operatrici.



- <u>forma generale stazionaria dell'equazione BEM per sistemi a due correnti</u>

$$\alpha_2 \frac{W_2^2}{2} - \alpha_1 \frac{W_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + R = -l_e \qquad (4.1)$$

L'equazione prevede:

- la presenza dei coefficienti correttivi α per tener conto delle disuniformità del profilo di velocità sulle sezioni di ingresso e di uscita del volume di controllo
- la presenza del solo campo gravitazionale quale responsabile delle forze di massa
- la possibilità che la densità del fluido vari lungo il percorso del fluido, $\rho = \rho(p,T)$
- la presenza di dissipazioni viscose (fluido reale) espresse dal termine R
- la presenza di macchine a flusso continuo che scambiano con il fluido il lavoro unitario l_e.

- <u>forme semplificate dell'equazione BEM stazionaria per sistemi a due correnti e per fluido a densità variabile</u>

- in assenza di lavoro ($l_e = 0$)

$$\alpha_2 \frac{W_2^2}{2} - \alpha_1 \frac{W_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + R = 0 \qquad (4.2)$$

- con coefficienti correttivi unitari ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$)

$$\frac{W_2^2}{2}-\frac{W_1^2}{2}+g(z_2-z_1)+\int_1^2\frac{dp}{\rho}+R=-l \qquad (4.3)$$

- con coefficienti correttivi unitari ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$) e in assenza di lavoro ($l_e = 0$)

$$\frac{W_2^2}{2}-\frac{W_1^2}{2}+g(z_2-z_1)+\int_1^2\frac{dp}{\rho}+R=0 \qquad (4.4)$$

- per fluido ideale ($R = 0$)

$$\alpha_2\frac{W_2^2}{2}-\alpha_1\frac{W_1^2}{2}+g(z_2-z_1)+\int_1^2\frac{dp}{\rho}=-l_e \qquad (4.5)$$

- per fluido ideale ($R = 0$) con lavoro nullo ($l_e = 0$)

$$\alpha_2\frac{W_2^2}{2}-\alpha_1\frac{W_1^2}{2}+g(z_2-z_1)+\int_1^2\frac{dp}{\rho}=0 \qquad (4.6)$$

- per fluido ideale ($R = 0$) con coefficienti correttivi unitari ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$)

$$\frac{W_2^2}{2}-\frac{W_1^2}{2}+g(z_2-z_1)+\int_1^2\frac{dp}{\rho}=-l_e \qquad (4.7)$$

- per fluido ideale ($R = 0$) con coefficienti correttivi unitari ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$) e lavoro nullo ($l_e = 0$), (equazione di Bernoulli relativa ad un tubo di flusso per fluido comprimibile)

$$\frac{W_2^2}{2}-\frac{W_1^2}{2}+g(z_2-z_1)+\int_1^2\frac{dp}{\rho}=0 \qquad (4.8)$$

Si evidenzia nelle (4.1)-(4.8) la presenza del termine integrale, la cui soluzione richiede la conoscenza dell'equazione di stato $p = p(\rho,T)$ e dell'equazione del processo termodinamico eseguito dal fluido nel percorso 1-2. L'integrazione è facilmente eseguibile nel caso dei processi reversibili notevoli di gas perfetto (processi isentropici, isotermi o politropici) ed in altri casi, pure reversibili, ad equazione nota (ad esempio i processi isentropici di vapore saturo o surriscaldato). La reversibilità dei processi è tuttavia compatibile solo con forme della BEM che si riferiscono a fluido ideale, privo cioè di irreversibilità meccaniche, quali la (4.5)-(4.8). Il significato delle forme BEM (4.1)-(4.4) non è compiutamente chiarito in letteratura e tanto meno lo sono le modalità di integrazione di (dp/ρ) nei casi di fluido reale, vale a dire in presenza di irreversibilità meccaniche nel fluido.

- <u>forme semplificate dell'equazione BEM stazionaria per sistemi a due correnti e per fluido a densità costante</u>

- in assenza di lavoro ($l_e = 0$)

$$\alpha_2 \frac{W_2^2}{2} - \alpha_1 \frac{W_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + R = 0 \qquad (4.9)$$

- con coefficienti correttivi unitari ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$)

$$\frac{W_2^2}{2} - \frac{W_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + R = -l_e \qquad (4.10)$$

- con coefficienti correttivi unitari ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$) e il assenza di lavoro ($l_e = 0$)

$$\frac{W_2^2}{2} - \frac{W_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + R = 0 \qquad (4.11)$$

- per fluido ideale ($R = 0$)

$$\alpha_2 \frac{W_2^2}{2} - \alpha_1 \frac{W_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} = -l_e \qquad (4.12)$$

- per fluido ideale ($R = 0$) con lavoro nullo ($l_e = 0$)

$$\alpha_2 \frac{W_2^2}{2} - \alpha_1 \frac{W_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} = 0 \qquad (4.13)$$

- per fluido ideale ($R = 0$) con coefficienti correttivi unitari ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$)

$$\frac{W_2^2}{2} - \frac{W_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} = -l_e \qquad (4.14)$$

- per fluido ideale ($R = 0$) con coefficienti correttivi unitari ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$) e lavoro nullo ($l_e = 0$), (equazione di Bernoulli relativa ad un tubo di flusso per fluido incomprimibile)

$$\frac{W_2^2}{2} - \frac{W_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} = 0 \qquad (4.15)$$

5. EQUAZIONE DI BERNOULLI LUNGO UNA LINEA DI CORRENTE

Alcune derivazioni meccaniche della BEM, relative a fluidi ideali, prendono le mosse dall'equazione di Bernoulli relativa ad una linea di corrente (l.d.c.).

Definita l'accelerazione di una particella fluida lungo la sua traiettoria ([12] p.186),

$$a_\xi = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial \xi} \tag{5.1}$$

l'equazione si deriva mediante proiezione della legge della dinamica secondo il versore ξ:

$$\sum_i F_{\xi,i} = ma_\xi \tag{5.2}$$

sotto le ipotesi di:

- assenza d'attrito (fluido ideale, $\mu = 0$)
- assenza di lavoro scambiato con l'esterno ($l_e = 0$)

In forma instazionaria comprimibile l'equazione di Bernoulli l.d.c. si può scrivere:

$$\int \frac{\partial u}{\partial t} d\xi + \frac{u^2}{2} + gz + \int \frac{dp}{\rho} = C \tag{5.3}$$

Dalla (5.3) si ricavano le note forme stazionarie, ponendo nulla la derivata temporale.
In alternativa, le forme stazionarie dell'equazione di Bernoulli si possono ricavare dall'equazione di Eulero (3.6) in forma stazionaria ([12] pag.482):

$$\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u} = \nabla\frac{(\mathbf{u}.\mathbf{u})}{2} - \mathbf{u}\,x\,\omega = \nabla\frac{u^2}{2} - \mathbf{u}\,x\,\omega = -\nabla(gz) - \frac{\nabla p}{\rho} \tag{5.4}$$

ove si è introdotta la vorticità ω:

$$\omega = \nabla x\mathbf{u} \tag{5.5}$$

Poiché $(\mathbf{u}\,x\,\omega)$è ortogonale ad u, e quindi alla linea di corrente, anche il termine

$$\nabla\frac{u^2}{2} + \nabla(gz) + \frac{\nabla p}{\rho} = \nabla\left(\frac{u^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho}\right) = \mathbf{u}\,x\,\omega \tag{5.6}$$

è ortogonale alla l.d.c., vale a dire che il gradiente della terna di Bernoulli è diretto ortogonalmente alla l.d.c., e pertanto ha variazione nulla in direzione della l.d.c., ciò che ne dimostra l'invarianza lungo una linea di corrente seppure limitatamente al caso di densità costante. Per quanto riguarda l'invarianza della terna di Bernoulli sull'intero campo di moto, la (5.6) chiarisce che questa è assicurata solo per moto irrotazionale (in questo caso il gradiente della terna in direzione ortogonale alla l.d.c. è sempre nullo).

Una diversa procedura prevede di proiettare la (5.4) in direzione parallela alla l.d.c., ottenendo:

$$\nabla_\xi \frac{u^2}{2} + \nabla_\xi (gz) + \frac{\nabla_\xi p}{\rho} - (\mathbf{u} \, x \omega)_\xi = 0 \tag{5.7}$$

equivalente a:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{u^2}{2} + \frac{\partial}{\partial \xi}(gz) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0 \tag{5.7}$$

Integrando lungo la coordinata ξ si ha:

$$\int_\xi \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{u^2}{2} \right) d\xi + \int_\xi \left(\frac{\partial}{\partial \xi}(gz) \right) d\xi + \int_\xi \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) d\xi = 0 \tag{5.8}$$

Da cui la forma stazionaria comprimibile:

$$\frac{u^2}{2} + g z + \int \frac{dp}{\rho} = C \tag{5.9}$$

e la forma stazionaria incomprimibile:

$$\frac{u^2}{2} + g z + \frac{p}{\rho} = C \tag{5.10}$$

Nel caso di campo di moto irrotazionale $(\omega = \nabla x \mathbf{u} = 0)$, la costante C nelle (5.9)-(5.10) assume lo stesso valore per tutte le linee di corrente. Nel caso di campo rotazionale, la costante C assume un diverso valore per ciascuna linea di corrente. Un interessante esempio di moto rotazionale non-viscoso è dato dal moto di corpo rigido stazionario di una massa fluida cilindrica attorno ad un asse di rotazione ([12] p.483)).
L'integrale che compare nella (5.9) può essere sviluppato conoscendo l'equazione del processo termodinamico, necessariamente reversibile, seguito dal fluido.

6. EQUAZIONE BEM: DERIVAZIONI MECCANICHE

Equazione di Bernoulli per un tubo di flusso

Nel caso di fluido ideale, l'equazione di Bernoulli per un tubo flusso, (4.8) o (4.15), può essere ricavata direttamente dalle (5.9) (5.10) senza dimostrazione, semplicemente assumendo che il profilo di velocità sia uniforme sulla sezione di ingresso. Questo approccio è seguito ad esempio da Cengel e Cimbala [12] (p.185).

Si noti che, in questo caso, l'uniformità della velocità del fluido sulla sezione di ingresso del CV assicura l'irrotazionalità del moto sia all'ingresso che entro il CV. Ad ogni sezione del tubo di flusso si ha quindi:

$$W = \frac{1}{S}\int_S (\mathbf{u}\,\mathbf{n})\,dS = u_{uniforme} \tag{6.1}$$

Poiché la costante C nelle (5.9) (5.10) ha il medesimo valore in ciascun punto di ciascuna sezione del tubo di flusso considerato, l'unica precisazione utile è che z rappresenta la quota del baricentro della sezione considerata, e che p e ρ sono assunte uniformi sulla sezione stessa. Tali ipotesi semplificative sono peraltro comuni a tutte le derivazioni della BEM.

Si può inoltre notare che, nella forma incomprimibile (4.15) l'uniformità della velocità su ciascuna sezione di un tubo di flusso prescrive la costanza del carico piezometrico, vale a dire una distribuzione idrostatica della pressione sulla sezione stessa. Non è quindi necessario prescrivere l'uniformità di pressione sulla sezione per questa particolare forma della BEM.

Una annotazione ulteriore riguarda il fatto che le forme (4.6), (4.13) della BEM, relative a fluido ideale con coefficienti α_1, α_2 non unitari, normalmente non trovano riscontro in letteratura. Si tratta infatti di casi molto particolari, nei quali il fluido deve intendersi ideale a viscosità nulla. Pur non essendo il fluido in grado produrre vorticità sotto tali ipotesi, esso entra tuttavia nel CV in moto rotazionale. La rotazionalità del moto imposta all'ingresso del tubo di flusso si deve conservare lungo tutto il tubo di flusso in base al teorema di Kelvin sulla circolazione ([3], p.285).

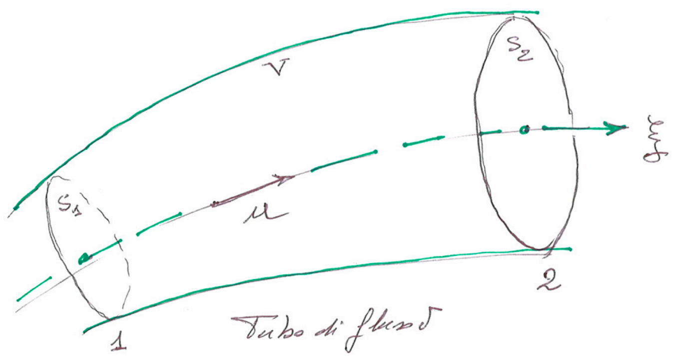
In queste particolarissime circostanze la forma incomprimibile (4.13) si presta ad una curiosa interpretazione del significato del coefficiente correttivo α. Questo viene infatti a rappresentare una sorta di media dei valori che la costante C nella (5.10) assume sulla sezione sulla generica sezione S di un tubo di flusso, secondo la relazione:

$$\alpha = \frac{2}{W^3 S}\int_S \left(C - \frac{p}{\rho} - gz\right)(\mathbf{u}\,\mathbf{n})\,dS \tag{6.2}$$

Derivazione dall'equazione di Navier-Stokes

Il metodo è proposto in [8] (p.218) e consiste nel considerare un tubo di flusso in un campo stazionario, per il quale sia possibile sostituire alla componente della velocità secondo l'asse ξ del tubo di flusso, il suo valor medio, W, sulla sezione trasversale S. Le ulteriori ipotesi alla base della derivazione sono:

i. la pressione e la densità sono uniformi su S; ii. la quota del baricentro di S è rappresentata, con sufficiente approssimazione, della quota locale z.



Si proietta poi l'equazione di Navier-Stokes (3.7) in forma stazionaria, lungo ξ, ottenendo la forma differenziale:

$$\rho \frac{dW}{d\xi} W = -\rho g \frac{dz}{d\xi} - \frac{dp}{d\xi} + \mu \left[\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla . \mathbf{u}) \right]_\xi \tag{6.3}$$

Si noti che, in base alle ipotesi di cui sopra le derivate che compaiono nei primi tre termini dell'equazione sono ordinarie. Dividendo per ρ ed integrando in dξ tra 1 e 2, si ha

$$\int_1^2 W dW + g \int_1^2 dz + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{\mu}{\rho} \int_1^2 \left[\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla . \mathbf{u}) \right]_\xi d\xi = 0 \tag{6. 4}$$

Ponendo:

$$R = \frac{\mu}{\rho} \int_1^2 \left[\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla . \mathbf{u}) \right]_\xi d\xi \tag{6. 5}$$

la (6.4) coincide con la (4.4):

$$\frac{W_2^2}{2} - \frac{W_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + R = 0 \tag{4.4}$$

A commento, si nota che:
- nella derivazione non può essere introdotto il termine di lavoro l_e;
- i coefficienti α_1, α_2 devono essere assunti unitari;
- la definizione di R (6.5) non è generale, come risulterà chiaro dal confronto con la formulazione completa del termine R (§ 10, eq. (10.4)).

Derivazione con riferimento al lavoro totale svolto da un sistema chiuso ausiliario
Questo approccio, adottato da Comini [10] (p. 35), si basa sulla valutazione diretta del lavoro svolto in un certo intervallo di tempo da un sistema chiuso mobile nello spazio e deformabile (valutazione di tipo Lagrangiano).

Con riferimento all'unità di massa ed assumendo che, istante per istante, la velocità e le proprietà termodinamiche siano uniformemente distribuite, si ha:

$$l_{eSC} = \int_{vi}^{vf} p dv - R_{SC} - \left(\frac{W_f^2}{2} - \frac{W_i^2}{2} \right) - (g z_f - g z_i) \qquad (6.6)$$

Nella (6.6) gli indici i ed f designano le condizioni di inizio e fine osservazione, l_{eSC} ed R_{SC} rappresentano rispettivamente il lavoro esterno complessivamente svolto dal sistema chiuso per unità di massa ed il lavoro delle forze d'attrito per unità di massa.
La (6.6) si applica ad un elemento di massa unitaria che viene seguito nel proprio moto attraverso un sistema a tubo di flusso stazionario monodimensionale, a partire dalla sezione 1 di ingresso, sino alla sezione 2 di uscita. Per tale sistema i ed f coincidono rispettivamente con 1 e 2.
La (6.6) esprime dunque anche il lavoro per unità di massa svolto dal sistema aperto in oggetto, l_e, a meno però dei termini che si riferiscono al lavoro di introduzione e di estrazione della massa unitaria alle sezioni di ingresso e di uscita, secondo la relazione:

$$l_e = l_{eSC} - p_2 v_2 + p_1 v_1 \qquad (6.7)$$

Introducendo la (6.7) nella (6.6) indicizzata nel modo detto ed intendendo $R_{SC} \equiv R$, si ricava di nuovo la forma (4.4).
Si noti come, anche in questo caso, sia preclusa l'introduzione dei coefficienti correttivi α sui termini di energia cinetica, ma sia presente il termine di lavoro.

7. EQUAZIONE BEM: DERIVAZIONI TERMODINAMICHE

Le derivazioni della BEM di tipo “termodinamico” prendono origine dall’equazione generale di bilancio dell’energia per i sistemi aperti.
In presenza del solo campo gravitazionale, la forma più generale dell’equazione di bilancio dell’energia per un volume di controllo aperto a più correnti, è la seguente ([12], pag.201):

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho e \, dV + \int_A \left(\frac{p}{\rho} + e\right)\rho(\mathbf{u_r}.\mathbf{n})\,dA = \dot{Q} - \dot{L}_e \tag{7.1}$$

ove:

$$e = u_{int} + gz + \frac{u^2}{2} \quad = \text{energia totale specifica del fluido} \tag{7.2}$$

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u} - \mathbf{u}_s \quad = \text{velocità del fluido rispetto alla superficie considerata} \tag{7.3}$$

essendo u_{int} l’energia interna specifica del fluido, e $\mathbf{u}_s$ la velocità locale dell’elemento di superficie dA considerato.

Per sistema stazionario ad una sola corrente e con volume di controllo fisso e indeformabile, la (7.1) di riduce alla nota forma:

$$\alpha_2 \frac{W_2^2}{2} - \alpha_1 \frac{W_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + h_2 - h_1 = q - l_e \tag{7.4}$$

Perdite di carico come differenza tra calore scambiato e variazione di energia interna
Questo approccio termodinamico di derivazione della BEM è adottato da numerosi autori, tra i quali Hughes e Brighton [5] (p.34), Schmidt, Henderson e Wolgemuth [7] (p.126), Fox e McDonald [9] (p.329), Cengel e Cimbala ([12] p.206).
Esso prevede il riarrangiamento della (7.4) mediante l’uso della definizione di entalpia:

$$h = u_{int} + pv$$

per ottenere la forma

$$l_e + \frac{p_1}{\rho_1} + \alpha_1 \frac{W_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho_2} + \alpha_2 \frac{W_2^2}{2} + gz_2 + \left(u_{int,2} - u_{int,1} - q\right) \tag{7.5}$$

Si argomenta che, nel caso di fluido ideale e quindi privo di irreversibilità dovute agli attriti viscosi, l’energia meccanica si conserva e che, pertanto, il termine in parentesi a s.m. è nullo:

$$u_{int,2} - u_{int,1} = q \tag{7.6}$$

Occorre subito rilevare che la proposizione (7.6) è vera solo se il fluido è a densità costante. Infatti, dalle equazioni del Tds e per i soli processi reversibili, si ha:

$$\delta q = Tds = du_{int} + pdv \qquad (7.7)$$

Pertanto, l'integrale del termine (pdv) non necessariamente è nullo se la densità del fluido non è costante. La cosa merita di essere precisata, in quanto, ad esempio, il risultato diretto dell'operazione in [12] è l'equazione:

$$\alpha_2 \frac{W_2^2}{2} - \alpha_1 \frac{W_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} = -l_e \qquad (7.8)$$

ove compaiono i valori di ρ alle sezioni di ingresso/uscita. L'inconsistenza della forma (7.8) è evidente. Ancora in [12] si afferma che la deviazione da zero del termine $\left(u_{int,2} - u_{int,1} - q\right)$ deriva da conversione irreversibile di energia meccanica in energia termica. Ciò equivale a dire che, per un fluido reale, $\left(u_{int,2} - u_{int,1} > q\right)$, e, pertanto, il termine $\left(u_{int,2} - u_{int,1} - q\right)$ definisce le perdite meccaniche:

$$R = u_{int,2} - u_{int,1} - q \qquad (7.9)$$

Questa definizione della perdita di carico R può avere una certa utilità didattica, in quanto mette in evidenza in modo semplice ed immediato gli effetti termodinamici della dissipazione meccanica.
Ad esempio, nel caso di un gas perfetto si ha

$$R = c_v\left(T_2 - T_1\right) - q \qquad (7.10)$$

che mostra l'effetto di riscaldamento prodotto sul fluido dalle dissipazioni meccaniche.
Tuttavia, come già rilevato e come peraltro correttamente precisato in [5], la (7.9) è valida solo sotto la condizione stretta di fluido a densità costante.

Il concetto è utilizzato in modo più estensivo da Potter e Wiggert [11] (p.147), nell'ambito di una trattazione completa dell'equazione integrale di bilancio dell'energia per sistemi aperti in forma instazionaria. In quel caso si definiscono infatti come termini di perdita meccanica tutti i termini dell'equazione che si riferiscono a forme non meccaniche di energia. Riformulata in termini stazionari, tuttavia, la definizione di R in [11] viene a coincidere con la (7.9) e ne conserva quindi i limiti di validità.

Perdite di carico come risultato di irreversibilità termodinamiche
Questo approccio è adottato da Cocchi [8] (p. 54), e si basa sull'integrazione dell'equazione del Tds (1.8) tra le sezioni 1 e 2 per ottenere:

$$h_2 - h_1 = q_{ir} + \int_{1,ir}^{2} vdp \qquad (7.11)$$

L'indice R indica che il processo considerato non è quello reale, ma un processo fittizio dichiarato almeno internamente invertibile. Si deve subito notare che la sola posizione di interna invertibilità non

è insufficiente per la derivazione della (7.11), per la quale è invece necessario imporre strettamente la reversibilità del processo, come da equazione (1.13).
Si scrive poi:

$$\delta q = Tds - T\delta s_{Irr} \tag{7.12}$$

da cui si valuta la quantità di calore scambiata nel processo reale mediante integrazione lungo il processo 1-2:

$$q = \int_1^2 Tds - \int_1^2 Tds_{Irr} \tag{7.13}$$

Non viene rilevato nel testo il fatto che T, temperatura del fluido, non necessariamente coincide con la temperatura del serbatoio di riferimento, T_R, come evidenziato nella (1.10). La (7.12), quindi, ammette, in via del tutto implicita, che gli scambi termici siano tutti di natura reversibile.

Si ricerca poi, tra gli infiniti che soddisfano la (7.11) un processo reversibile per il quale:

$$q_{rev} = q_{ir} = \int_1^2 Tds \tag{7.14}$$

Per sostituzione nella (7.11) si ha:

$$h_2 - h_1 = q + \int_1^2 Tds_{Irr} + \int_{1,ir}^2 vdp \tag{7.15}$$

Dalla (7.4) si ottiene infine:

$$\alpha_2 \frac{W_2^2}{2} - \alpha_1 \frac{W_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + R + \int_{1,ir}^2 vdp = -l_e \tag{7.16}$$

con

$$R = \int_1^2 Tds_{Irr} \tag{7.17}$$

La (7.16) ha il pregio di mettere bene in evidenza la relazione esistente tra irreversibilità e perdite di energia meccanica. Non si esplicita però il fatto che la proposizione (7.13) contiene in sé l'ipotesi di scambio termico reversibile lungo il processo reale 1-2, senza la quale non è possibile escludere dal computo di s_{Irr} la frazione dovuta ad irreversibilità termiche, che, ovviamente, non deve intervenire nel bilancio meccanico. Inoltre, il termine integrale, alla luce di quanto detto, non dovrebbe riferirsi semplicemente ad un processo internamente invertibile, ma dovrebbe invece considerare un processo strettamente reversibile. L'identificazione di tale processo reversibile 1-2 resta comunque non facile.

L'approccio adottato da Streeter e Wylie [13] (p.109) ricade pure in questa categoria, in quanto tratta l'equazione stazionaria dell'energia in forma differenziale per un tubo di flusso, con inclusione del termine di lavoro, estraendone la relazione:

$$\frac{dp}{\rho} + g\,dz + WdW + du_{int} + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) + dl_e - dq = 0 \qquad (7.18)$$

Questa, dopo applicazione dell'equazione del Tds per processi reversibili (1.12), produce direttamente la (4.7) mediante integrazione tra 1 e 2.
Per fluidi reali, invece, si ha:

$$\frac{dp}{\rho} + g\,dz + WdW + Tds + dl_e - dq = 0 \qquad (7.19)$$

Si definisce quindi la perdita di carico infinitesima come:

$$dR = Tds - dq \qquad (7.19)$$

la cui integrazione tra 1 e 2 produce la forma (4.3).
Si nota qui come l'ipotesi di tubo di flusso monodimensionale adottata impedisca la produzione dei coefficienti α e come non sia ben chiaro come il tubo di flusso interagisca con eventuali macchine.
L'equazione viene però sempre impiegata nella sua forma incomprimibile (4.11).

La metodologia adottata da Foà [4] e ripresa da Giulianini [6] è analoga, con la variante che ci si riferisce a sistemi a tubo di flusso stazionario monodimensionale in assenza di lavoro esterno e che si considera dR come quantità di calore conferita all'unità di massa.
Si giunge alla forma (4.4) ponendo:

$$dq' = dq + dR = dh - vdp \qquad (7.20)$$

Si deve anche in questo caso notare che la derivazione implica che i trasferimenti di calore siano assunti reversibili, presupposto necessario per la validità della (7.20) che è infatti equivalente alla (1.13).

8. EQUAZIONE BEM IN FORMA GENERALE: DERIVAZIONE MECCANICA

8.1 Premesse

Il procedimento dimostrativo riproduce sostanzialmente quello proposto da Bird [2] e ripreso da Panton [3] (pp.126-129). Esso si basa sulla considerazione di un generico volume di controllo aperto, VC, e sulla integrazione su di opportuno sistema chiuso ausiliario, V_{sc}, dell'equazione di bilancio dell'energia meccanica per un sistema elementare, secondo la procedura usualmente impiegata per ottenere le equazioni di bilancio per sistemi aperti (bilancio di massa, quantità di moto, momento della quantità di moto, energia, entropia).

Le ipotesi comuni alla base della derivazione delle diverse equazioni di bilancio sono:

- equilibrio termodinamico locale;
- continuità e derivabilità delle proprietà termodinamiche, all'interno di ciascuna fase presente nel sistema;
- continuità e derivabilità del vettore velocità all'interno del sistema.

Il volume di controllo CV ha volume V ed è contornato dalla superficie A. Questa è suddivisa nei due contributi S, relativo alle sezioni di passaggio del fluido, e A_s, relativo alle pareti impermeabili.
Si ha quindi: $A = A_s + S$.

Si considera un CV fisso nello spazio, anche se eventualmente deformabile. In tali condizioni, alle sezioni di passaggio la velocità del fluido rispetto alla sezione stessa è in ogni punto pari alla velocità assoluta del fluido. L'estensione al caso di superfici di passaggio mobili non presenta peraltro alcuna difficoltà.
Per semplicità, le espressioni finali dei singoli termini sono riferite ad un sistema a due sole correnti, immaginando che la corrente (1) sia di ingresso e la corrente (2) sia di uscita. Il procedimento è tuttavia generale e l'estensione dei risultati a qualsivoglia numero di correnti di entrata/uscita si esegue semplicemente sostituendo le relative sommatorie a ciascuno dei termini ad indice 2 (uscita) e ad indice 1 (ingresso) nella formulazione finale dell'equazione.

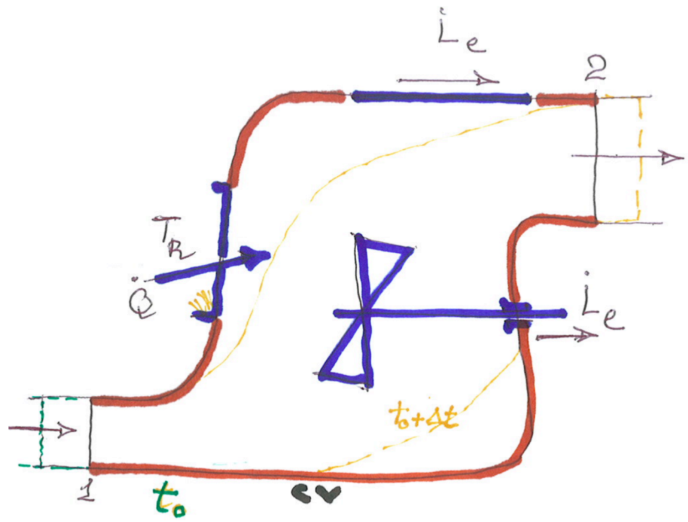
I termini relativi alle sezioni di ingresso/uscita tengono conto delle seguenti assunzioni, anch'esse comuni a tutte le formulazioni delle equazioni di bilancio:

- la pressione si assume uniformemente distribuita su ciascuna sezione di passaggio;
- le proprietà termodinamiche del fluido (ad esempio ρ, T, u_{int}, h, s) si assumono pure uniformemente distribuite su ciascuna sezione di passaggio;
- la quota baricentrica della sezione di passaggio (z_1 o z_2) è assunta a riferimento per la valutazione del flusso di energia potenziale attraverso la sezione stessa;
- l'intensità del campo gravitazionale si assume uniforme e costante nel tempo.

Nei processi dimostrativi relativi ai sistemi aperti è essenziale la considerazione di un sistema chiuso ausiliario a volume V_{sc}, la cui massa, m_{sc}, resta costante nell'intervallo infinitesimo di osservazione, dt:

$$\frac{d}{dt} m_{sc} = \frac{d}{dt} \int_{V_{sc}} \rho \, dV = 0 \qquad (8.1)$$

Il volume V_{sc} del sistema chiuso ausiliario, così come il volume del sistema aperto considerato CV, può variare nel tempo.
Si assume che, al tempo t di inizio osservazione, il volume di controllo ed il sistema chiuso ausiliario coincidano $\left(V \equiv V_{sc}\right)$.



8.2 Richiami sulla derivazione dell'equazione integrale di bilancio della quantità di moto

La procedura di derivazione dell'equazione BEM si ispira a quella comunemente utilizzata per derivare l'equazione integrale di bilancio della quantità di moto, della quale è quindi utile riprendere alcuni elementi essenziali.
Come noto, l'equazione integrale di bilancio della quantità di moto per sistemi aperti si può ricavare per integrazione sul volume V_{sc} dei contributi delle particelle elementari che compongono il sistema ausiliario.
L'equazione della quantità di moto per una particella di massa costante, δm, e di volume δV si scrive:

$$\delta m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \sum_{\mathbf{i}} d\mathbf{F}_{i,locali} \tag{8.2}$$

ove le $d\mathbf{F}_{i,locali}$ sono le forze di massa e di superficie che agiscono sulla particella.

Introducendo la densità ρ, il p.m. della (8.2) diviene

$$\delta m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} \delta V \tag{8.3}$$

L'integrazione su V_{sc} della (8.2) rende:

$$\int_{Vsc} \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} dV = \frac{d}{dt} \int_{Vsc} \mathbf{u} \rho dV = \sum_{i} \mathbf{F_i} \tag{8.4}$$

Al p.m. della (8.4) si è fatto uso della formula di Leibnitz (1.4), con riferimento al volume del sistema chiuso ausiliario V_{sc}, per il quale l'identità tra la velocità del fluido alle superfici di contorno e la velocità delle superfici di contorno è assicurata per definizione (si noti che la derivata temporale di u nella (8.4) essendo riferita ad una particella in moto è una derivata sostanziale).

Le $\mathbf{F}_i$ al s.m. della (8.4) sono le risultanti delle forze esterne agenti sul sistema stesso.
Le forze da considerare sono:

- forze di massa, rappresentate qui dalla sola forza di gravità
  $\rho\mathbf{g} = -\rho\nabla\psi = -\rho\nabla(\mathrm{gz})$ = risultante della forza di gravità per unità di volume
- forze di superficie, rappresentate dalle risultanti delle forze di pressione e di tensione viscosa
  $-\nabla \mathrm{p} = \nabla.\boldsymbol{\pi}$ = risultante delle pressioni per unità di volume
  $\nabla.\boldsymbol{\tau}$ = risultante delle tensioni per unità di volume

L'integrazione sul volume di tali termini fornisce le risultanti delle azioni sviluppate dalla gravità e dalle superfici di contorno sul fluido all'interno del CV, come di seguito indicato:

- risultante delle forze di gravità

$$\mathbf{F}_g = \int_V \rho\mathbf{g}\,\mathrm{dV} \tag{8.5}$$

- risultante delle forze di pressione

$$\mathbf{F}_p = \int_V -\nabla \mathrm{p}\,\mathrm{dV} = \int_V \nabla.\boldsymbol{\pi}\,\mathrm{dV} = \int_A \boldsymbol{\pi}.\mathbf{n}\mathrm{dA} = -\int_A \mathrm{p}\mathbf{n}\mathrm{dA} \tag{8.6}$$

- risultante delle forze di tensione

$$\mathbf{F}_\tau = \int_V \nabla.\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{dV} = \int_A \boldsymbol{\tau}.\mathbf{n}\mathrm{dA} \tag{8.7}$$

Nelle (8.6), (8.7) **n** è il versore della normale esterna al volume di controllo.
Nella elaborazione si è fatto uso del teorema della divergenza applicato ad un tensore (1.2), notando che la pressione p (nella sua accezione vettoriale) può essere espressa mediante un tensore $\boldsymbol{\pi}$ con termini diagonali pari a (– p) e con termini non diagonali nulli. Si ha pertanto $(-\nabla \mathrm{p} = \nabla.\boldsymbol{\pi})$.

Elaborando la (8.4) si ricava l'equazione di bilancio della quantità di moto per i sistemi aperti nelle forme di usuale impiego.

8.3 Derivazione "meccanica" della BEM

Moltiplicando scalarmente la (8.2) per la velocità **u**, si ottiene la richiesta equazione di bilancio dell'energia meccanica per una particella di massa δm invariante:

$$\delta \mathrm{m}\mathbf{u}.\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{dt}} = \rho\frac{\mathrm{d}(\mathrm{u}^2/2)}{\mathrm{dt}}\delta \mathrm{V} = \sum_i (\mathbf{u}.\mathrm{d}\mathbf{F}_{\mathrm{i,locali}}) \tag{8.8}$$

L'integrazione della (8.8) sul volume del sistema chiuso, V_{sc}, produce:

$$\int_{Vsc} \rho \frac{d}{dt}\left(\frac{u^2}{2}\right) dV = \sum_i \int_V (\mathbf{u}.d\mathbf{F}_i) \tag{8.9}$$

Anche in questo caso, trattando il p.m. della (8.9) tramite la formula di Leibnitz si ha:

$$\frac{d}{dt}\int_{Vsc} \rho \left(\frac{u^2}{2}\right) dV = \sum_i \int_V (\mathbf{u}.d\mathbf{F}_i) \tag{8.10}$$

Facendo uso del teorema del trasporto di Reynolds per il sistema chiuso ausiliario, equazione (1.5), il primo membro della (8.10) rende:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{Vsc} \rho \left(\frac{u^2}{2}\right) dV = \frac{d}{dt}\int_V \left(\rho\frac{u^2}{2}\right) dV + \int_A \rho \frac{u^2}{2}(\mathbf{u}_r.\mathbf{n}) dA = \\
&= \frac{d}{dt}\int_V \left(\rho\frac{u^2}{2}\right) dV + \int_{As} \rho \frac{u^2}{2}(\mathbf{u}_r.\mathbf{n}) dA_s + \int_S \rho \frac{u^2}{2}(\mathbf{u}_r.\mathbf{n}) dS = \\
&= \frac{d}{dt}\int_V \left(\rho\frac{u^2}{2}\right) dV + \quad 0 \quad + \alpha_2 \frac{W_2^2}{2} Q_{m,2} - \alpha_1 \frac{W_1^2}{2} Q_{m,1}
\end{aligned} \tag{8.11}$$

L'ultima proposizione nella (8.11) tiene conto del fatto che:

- $\mathbf{u}_r = 0$ su A_s per continuità materiale;
- $\mathbf{u}_r \equiv \mathbf{u}$ su S in base all'ipotesi di sezioni passaggio fisse nello spazio.

A s.m. della (8.11) il primo termine rappresenta la variazione del contenuto di energia cinetica entro il CV, gli ultimi due termini rappresentano i flussi di energia cinetica in uscita (2) e in ingresso (1) attraverso le sezioni aperte del CV.

Gli integrali a s.m. della (8.10) rappresentano le quantità di lavoro svolte sul fluido nell'unità di tempo dalle forze di gravità, di pressione, di tensione viscosa, espresse rispettivamente dalle equazioni:

$$\dot{L}_g = -\int_{\mathbf{V}} \rho(\mathbf{u}.\nabla\psi) dV \tag{8.12}$$

$$\dot{L}_p = -\int_{\mathbf{V}} (\mathbf{u}.\nabla p) dV \tag{8.13}$$

$$\dot{L}_\tau = \int_{\mathbf{V}} \mathbf{u}.[\nabla.\boldsymbol{\tau}] dV \tag{8.14}$$

In forma sintetica, la richiesta equazione di bilancio si può quindi esprimere come:

$$\frac{d}{dt}\int_V \frac{u^2}{2}\rho dV + \alpha_2 \frac{W_2^2}{2} Q_{m,2} - \alpha_1 \frac{W_1^2}{2} Q_{m,1} = \dot{L}_g + \dot{L}_p + \dot{L}_\tau \qquad (8.15)$$

Si elaborano nel seguito i singoli termini al s.m. della (8.15).

- Lavoro delle forze gravitazionali

$$\begin{aligned}\dot{L}_g &= -\int_V \rho(\mathbf{u}.\nabla\psi)dV = -\int_V \nabla.(\rho\mathbf{u}\psi)dV + \int_V \psi\nabla.(\rho\mathbf{u})dV = \\ &= -\int_A [\rho\mathbf{u}\psi].\mathbf{n}dA - \int_V \psi\frac{\partial\rho}{\partial t}dV = -\int_A \rho\psi(\mathbf{u}.\mathbf{n})dA - \int_V \psi\frac{\partial\rho}{\partial t}dV\end{aligned} \qquad (8.16)$$

Nello sviluppo della (8.16) si è fatto uso del teorema della divergenza (1.1), e, per quanto riguarda il secondo termine s.m. della (8.16), dell'equazione di continuità. Questo termine viene ulteriormente manipolato tramite la formula di Leibnitz applicata al CV (1.3), tenendo inoltre conto del fatto che il potenziale gravitazionale ψ non varia nel tempo:

$$\begin{aligned}&-\int_V \psi\frac{\partial\rho}{\partial t}dV = -\int_V \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial t}dV - \int_V \rho\frac{\partial\psi}{\partial t}dV = -\int_V \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial t}dV = \\ &= -\frac{d}{dt}\int_V \rho\psi dV + \int_A \rho\psi(\mathbf{u}_s.\mathbf{n})dA\end{aligned} \qquad (8.17)$$

Nella (8.17) $\mathbf{u}_s$ rappresenta la velocità dei contorni. Sostituendo nella (8.16) ed introducendo la velocità relativa del fluido rispetto ai contorni ($\mathbf{u}_r = \mathbf{u} - \mathbf{u}_s$), si ha:

$$\begin{aligned}\dot{L}_g &= -\int_A \rho\psi(\mathbf{u}_r.\mathbf{n})dA - \frac{d}{dt}\int_V \rho\psi dV = \\ &= -\int_S \rho\psi(\mathbf{u}.\mathbf{n})dS - \int_{As} \rho\psi(\mathbf{u}_r.\mathbf{n})dA - \frac{d}{dt}\int_V \rho\psi dV\end{aligned} \qquad (8.18)$$

Il secondo termine s.m. della (8.18) è nullo in quanto ($\mathbf{u}_r = 0$) sulle superfici impermeabili.
Si ha quindi:

$$\dot{L}_g = \underbrace{-Q_{m,2}gz_2}_{(a)} + \underbrace{Q_{m,1}gz_1}_{(b)} \underbrace{- \frac{d}{dt}\int_V \rho\psi dV}_{(c)} \qquad (8.19)$$

I termini a s.m. della (8.19) rappresentano rispettivamente: (a),(b) i flussi di energia potenziale alle sezioni di uscita/ingresso; (c) la variazione nel tempo del contenuto di energia potenziale entro il volume di controllo.

- Lavoro delle forze di pressione

$$\dot{L}_p = -\int_V (\mathbf{u}.\nabla p)dV = -\int_V \nabla.(\mathbf{u}p)dV + \int_V p(\nabla.\mathbf{u})dV =$$

$$= -\int_A p(\mathbf{u}.\mathbf{n})dA + \int_V p(\nabla.\mathbf{u})dV = -\int_S \frac{p}{\rho}(\rho\mathbf{u}.\mathbf{n})dS - \int_{As} p(\mathbf{u}.\mathbf{n})dA_s + \int_V p(\nabla.\mathbf{u})dV = \quad (8.20)$$

$$= \underset{(a)}{-Q_{m,2}\frac{p_2}{\rho_2}} + \underset{(b)}{Q_{m,1}\frac{p_1}{\rho_1}} \underset{(c)}{- \int_{As} p(\mathbf{u}.\mathbf{n})dA} + \underset{(d)}{\int_V p(\nabla.\mathbf{u})dV}$$

I termini a s.m. della (8.20) rappresentano rispettivamente: (a), (b) i flussi attraverso le sezioni di uscita/ingresso della quantità (pv); (c) il lavoro di reazione alla pressione svolto sul fluido nell'unità di tempo dalle pareti impermeabili entro o alla periferia del CV. Tale termine è non nullo in presenza di pareti solide mobili con direzione non parallela alla velocità del fluido; (d) il lavoro di compressione/espansione del fluido svolto nell'unità di tempo.

- Lavoro delle forze di tensione viscosa

$$\dot{L}_\tau = \int_V \mathbf{u}.[\nabla.\boldsymbol{\tau}]dV = \int_V \nabla.[\mathbf{u}.\boldsymbol{\tau}]dV - \int_V \boldsymbol{\tau}:\{\nabla\mathbf{u}\}dV$$

$$= \int_A [\mathbf{u}.\boldsymbol{\tau}].\mathbf{n}dA - \int_V \boldsymbol{\tau}:\{\nabla\mathbf{u}\}dV = \underset{(a)}{\int_{As} [\mathbf{u}.\boldsymbol{\tau}].\mathbf{n}dA} - \underset{(b)}{\int_V \boldsymbol{\tau}:\{\nabla\mathbf{u}\}dV} \quad (8.21)$$

I termini a s.m. della (8.21) rappresentano: (a) il lavoro di trascinamento svolto sul fluido nell'unità di tempo da pareti impermeabili mobili (esempio, parete scorrevole nel moto alla Couette); (b) il lavoro di deformazione svolto sul fluido nell'unità di tempo dalle tensioni viscose e dissipato irreversibilmente.
Nella considerazione del termine (a) della (8.21) occorre fare attenzione al fatto che il prodotto vettoriale $[\mathbf{u}.\boldsymbol{\tau}]$ è in grado di generare termini non nulli in direzione **n**, ortogonale alla superficie solida dA, sfruttando il fatto che ad una componente di tensione tangenziale parallela alla superficie dA corrisponde necessariamente un identico termine di $[\boldsymbol{\tau}]$ giacente su di una superficie parallela ad **n** e cioè ortogonale alla parete mobile. Infine, nella (8.21) si è fatto coincidere A con A_s, intendendo trascurabile il lavoro delle tensioni (si tratta di norma delle sole componenti normali) sulle superfici di passaggio S.

Il termine (b) nella (8.21) è particolarmente significativo, poiché rappresenta l'effetto delle dissipazioni, o irreversibilità, meccaniche. La sua forma nella (8.21) è particolarmente criptica, tuttavia si può utilmente ricordare che, per un fluido newtoniano, la funzione integranda è correlata alla funzione di dissipazione Φ che compare nella forma completa dell'equazione differenziale dell'energia per la convezione nei fluidi [1] (p. 319-322).

Per viscosità costante si ha:

$$\tau:\{\nabla\mathbf{u}\} = \mu\Phi \quad (8.22)$$

L'espressione di $\boldsymbol{\Phi}$ in coordinate cartesiane è la seguente:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi} = 2\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2\right] + \\
+\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2
\end{aligned}
\qquad (8.23)
$$

La quantità ϕ è definita positiva, così come il prodotto $\boldsymbol{\tau}:\{\nabla \mathbf{u}\}$.

8.4 BEM: forma completa

Sostituendo nella (8.15) le espressioni sviluppate per i termini di lavoro (8.19), (8.20) e (8.21), si ha:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_V \frac{u^2}{2}\rho dV + \alpha_2 \frac{W_2^2}{2} Q_{m,2} - \alpha_1 \frac{W_1^2}{2} Q_{m,1} = \\
&-Q_{m,2} g z_2 + Q_{m,1} g z_1 - \frac{d}{dt}\int_V \rho\psi dV \\
&-Q_{m,2}\frac{p_2}{\rho_2} + Q_{m,1}\frac{p_1}{\rho_1} - \int_{As} p(\mathbf{u}.\mathbf{n}) dA + \int_V p(\nabla.\mathbf{u}) dV \\
&+\int_{As} [\mathbf{u}.\boldsymbol{\tau}].\mathbf{n} dA - \int_V \boldsymbol{\tau}:\{\nabla \mathbf{u}\} dV
\end{aligned}
\qquad (8.24)
$$

da cui:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_V \rho\left(\frac{u^2}{2} + gz\right) dV + && \text{(a)} \\
&+Q_{m,2}\left(\alpha_2 \frac{W_2^2}{2} + g z_2 + \frac{p_2}{\rho_2}\right) - Q_{m,1}\left(\alpha_1 \frac{W_1^2}{2} + g z_1 + \frac{p_1}{\rho_1}\right) - && \text{(b)} \\
&-\int_V p(\nabla.\mathbf{u}) dV + \int_V \boldsymbol{\tau}:\{\nabla \mathbf{u}\} dV && \text{(c)} \\
&= -\int_{As} p(\mathbf{u}.\mathbf{n}) dA + \int_{As} [\mathbf{u}.\boldsymbol{\tau}].\mathbf{n} dA && \text{(d)}
\end{aligned}
\qquad (8.25)
$$

I termini della (8.25) hanno, con riferimento all'unità di tempo, il seguente significato:

(a) variazione del contenuto di energia cinetica e potenziale entro il CV;

(b) termini di flusso di energia cinetica, potenziale e di pressione attraverso le superfici aperte del CV;

(c) termini di lavoro (reversibile) di compressione/espansione del fluido e di lavoro di dissipazione viscosa (irreversibile) entro il CV;

(d) termini di lavoro delle pressioni e delle tensioni viscose alle pareti mobili sul fluido.

Impiegando la convenzione termodinamica che assegna valore positivo al lavoro trasferito dal sistema all'ambiente, i termini (d) possono essere sinteticamente espressi come:

$$-\dot{L}_{ep} = -\int_{As} p(\mathbf{u}.\mathbf{n})dA \tag{8.26}$$

$$-\dot{L}_{e\tau} = +\int_{As} [\mathbf{u}.\boldsymbol{\tau}].\mathbf{n}dA \tag{8.27}$$

(- L_{ep}) rappresenta il lavoro esterno svolto dalla pressione alle pareti impermeabili sul fluido entro il CV; inversamente, L_{ep} rappresenta il lavoro di pressione svolto dal fluido sulle pareti mobili del CV.
(- $L_{e\tau}$) rappresenta il lavoro esterno delle tensioni alle pareti impermeabili sul fluido contenuto nel CV; inversamente, $L_{e\tau}$ rappresenta il lavoro di trascinamento viscoso svolto dal fluido sulle pareti mobili del CV.
La somma di L_{ep} e $L_{e\tau}$ rappresenta quindi il lavoro esterno complessivo L_e svolto dal sistema sull'ambiente.

$$\dot{L}_e = \dot{L}_{ep} + \dot{L}_{e\tau} \tag{8.28}$$

Il termine che rappresenta la potenza meccanica dissipata viene denominato $\dot{R}$:

$$\dot{R} = \int_V \boldsymbol{\tau} :\{\nabla\mathbf{u}\}dV \tag{8.29}$$

Con le notazioni (8.28) e (8.29), la (8.25) assume la forma:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_V \rho\left(\frac{u^2}{2} + gz\right)dV + && \text{(a)}\\
&+Q_{m,2}\left(\alpha_2\frac{W_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho_2}\right) - Q_{m,1}\left(\alpha_1\frac{W_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho_1}\right) - && \text{(b)}\\
&-\int_V p(\nabla.\mathbf{u})dV + \dot{R} = -\dot{L}_e && \text{(c,d)}
\end{aligned} \tag{8.30}$$

La (8.30), insieme alle relazioni (8.26)-(8.29), costituisce la richiesta formulazione generale dell'equazione integrale di bilancio dell'energia meccanica. Come detto, essa è facilmente estensibile a sistemi ad N correnti di ingresso/uscita.

La (8.30) coincide anche formalmente con l'espressione generale del bilancio BEM presentata in [3] (p.126). In [2] il procedimento si differenzia un poco da quello qui delineato, e si perviene infine a due forme alternative della (8.30), una contenente le energie libere di Gibbs e di Helmholtz, valida per processi a pressione costante, l'altra, contenente l'energia interna e l'entalpia, valida per processi isotermi. Non si riprendono qui tali formulazioni.

9. EQUAZIONE BEM IN FORMA GENERALE: DERIVAZIONE TERMODINAMICA

La (8.25) può egualmente essere derivata dall'equazione integrale di bilancio dell'energia sul volume di controllo.
Allo scopo, la (7.1) si può sviluppare come segue:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_V \rho\left(gz+\frac{u^2}{2}\right)dV+\int_A\left(\frac{p}{\rho}+gz+\frac{u^2}{2}\right)\rho(\mathbf{u_r}.\mathbf{n})dA+\\&+\frac{d}{dt}\int_V \rho u_{int}dV+\int_A u_{int}\rho(\mathbf{u}_r.\mathbf{n})dA=\dot{Q}-\dot{L}_e\end{aligned}\tag{9.1}$$

Nella (9.1) gli ultimi due termini a p.m., contenenti u_{int}, si possono trattare facendo uso della formula di Leibnitz (1.3), del teorema della divergenza (1.1) e dell'equazione di continuità (3.1), come segue:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_V \rho u_{int}dV+\int_A u_{int}\rho(\mathbf{u}_r.\mathbf{n})dA=\int_V\frac{\partial(\rho u_{int})}{\partial t}dV+\int_A\rho u_{int}(\mathbf{u}.\mathbf{n})dA=\\&=\int_V\frac{\partial(\rho u_{int})}{\partial t}dV+\int_V\nabla.(\rho u_{int}\mathbf{u})dV=\int_V\left[\frac{\partial(\rho u_{int})}{\partial t}+\nabla.(\rho u_{int}\mathbf{u})\right]dV=\\&=\int_V\rho\left[\frac{\partial u_{int}}{\partial t}+\mathbf{u}.\nabla.u_{int}\right]dV=\int_V\rho\frac{Du_{int}}{Dt}dV\end{aligned}\tag{9.2}$$

L'ultimo termine della (9.2) si elabora ulteriormente mediante l'equazione del Tds:

$$Tds=du_{int}+pdv\tag{9.3}$$

$$\int_V\rho\frac{Du_{int}}{Dt}dV=\int_V\rho T\frac{Ds}{Dt}dV-\int_V\rho p\frac{Dv}{Dt}dV\tag{9.4}$$

Dall'equazione di continuità (3.2) si ha:

$$\nabla.\mathbf{u}=-\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}=\frac{1}{v}\frac{Dv}{Dt}=\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\mathbf{u}.\nabla v\right)=\rho\frac{Dv}{Dt}\tag{9.5}$$

da cui:

$$\int_V\rho\frac{Du_{int}}{Dt}dV=\int_V\rho T\frac{Ds}{Dt}dV-\int_V p(\nabla.\mathbf{u})dV\tag{9.6}$$

Sostituendo nella (9.1) si ottiene:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\left(gz+\frac{u^2}{2}\right)dV+\int_A\left(\frac{p}{\rho}+gz+\frac{u^2}{2}\right)\rho(\mathbf{u_r}.\mathbf{n})dA+ \tag{9.7}$$
$$+\int_V \rho T\frac{Ds}{Dt}dV-\int_V p(\nabla.\mathbf{u})dV=\dot{Q}-\dot{L}_e$$

Con le usuali ipotesi relative alle sezioni di ingresso/uscita, per un sistema a due correnti la (9.7) diviene:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\left(gz+\frac{u^2}{2}\right)dV+Q_{m,2}\left(\alpha_2\frac{W_2^2}{2}+gz_2+\frac{p_2}{\rho_2}\right)-Q_{m,1}\left(\alpha_1\frac{W_1^2}{2}+gz_1+\frac{p_1}{\rho_1}\right)- \tag{9.8}$$
$$-\int_{\mathbf{V}} p(\nabla.\mathbf{u})dV+\int_V \rho T\frac{Ds}{Dt}dV=\dot{Q}-\dot{L}_e$$

Si elabora ora il termine che include l'entropia s, richiamando la relazione termodinamica (1.10) che correla la variazione di entropia specifica in un processo infinitesimo irreversibile alla quantità di calore δq scambiata con un serbatoio alla temperatura T_R, e alla quantità di entropia irreversibilmente prodotta per unità di massa, δs_{Irr}:

$$ds=\frac{\delta q}{T_R}+\delta s_{Irr} \tag{9.9}$$

Si elabora la (9.9) come segue:

$$Tds=\frac{T}{T_R}\delta q+T\delta s_{Irr}=\frac{T}{T_R}\delta q+\delta q-\delta q+T\delta s_{Irr}= \tag{9.10}$$
$$=\delta q-\left(\frac{T_R-T}{T_R}\right)\delta q+T\delta s_{Irr}$$

Definite le velocità di trasferimento di calore e di produzione entropica irreversibile per unità di massa rispettivamente come:

$$\dot{q}=\frac{\delta q}{dt} \tag{9.11}$$
$$\dot{s}_{Irr}=\frac{\delta s_{Irr}}{dt} \tag{9.12}$$

con riferimento ad una particella in moto, si ha

$$T\frac{Ds}{Dt}=\dot{q}-\left(\frac{T_R-T}{T_R}\right)\dot{q}+T\dot{s}_{Irr} \tag{9.13}$$

La (9.13) indica che la variazione nell'unità di tempo dell'entropia di una particella elementare lungo la sua traiettoria si può interpretare come somma dei contributi seguenti

- $\frac{\dot{q}}{T}$ flusso entropico reversibile per unità di massa che si avrebbe scambiando la potenza unitaria $\dot{q}$ con un serbatoio alla stessa temperatura T della particella (flusso entropico reversibile, senza produzione di entropia);

- $\dot{s}_{Irr}$ velocità complessiva di produzione entropica per unità di massa; ingloba sia i contributi termici che i contributi di natura meccanica;

- $-\left(\frac{T_R - T}{T_R}\right)\frac{\dot{q}}{T}$ termine di flusso entropico per unità di massa che corregge il termine di flusso entropico reversibile per tener conto del fatto che $T_R \neq T$ (ad esempio, se $T_R > T$, il flusso entropico reversibile $\frac{\dot{q}}{T}$ risulta inferiore a quello effettivo $\frac{\dot{q}}{T_R}$).
La differenza tra flusso entropico reale e flusso entropico reversibile è quantificata dal rapporto a T della potenza per unità di massa che sarebbe sviluppata da una macchina di Carnot che funzionasse tra T_R e T, assorbendo la potenza termica $\dot{q}$ al serbatoio a T_R. Tale potenza meccanica, teoricamente sfruttabile e non prodotta nel processo reale, si può intendere come integralmente dissipata. Il flusso entropico correttivo rappresenta quindi la frazione di $\dot{s}_{Irr}$ attribuibile a cause termiche. E' interessante notare che, nel caso in cui le irreversibilità meccaniche siano nulle, questo termine coincide con $\dot{s}_{Irr}$ e la variazione entropica eguaglia il flusso entropico reversibile, come da definizione di entropia.
Si noti infine che, sia $T\dot{s}_{Irr}$ che $\left(\frac{T_R - T}{T_R}\right)\dot{q}$ sono definiti positivi.

Si ha quindi:

$$\int_V \rho T \frac{Ds}{Dt} dV = \int_V \rho \dot{q} dV - \int_V \rho \left(\frac{T_R - T}{T_R}\right)\dot{q} dV + \int_V \rho T \dot{s}_{Irr} dV \qquad (9.14)$$

Il primo termine a s.m. della (9.14) eguaglia, per definizione, la potenza termica trasferita al fluido, $\dot{Q}$:

$$\dot{Q} = \int_V \rho \dot{q} dV \qquad (9.15)$$

Sostituendo la (9.14) nella (9.8), tenendo conto della (9.15), si ha:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\left(gz+\frac{u^2}{2}\right)dV+Q_{m,2}\left(\alpha_2\frac{W_2^2}{2}+gz_2+\frac{p_2}{\rho_2}\right)-Q_{m,1}\left(\alpha_1\frac{W_1^2}{2}+gz_1+\frac{p_1}{\rho_1}\right)- \tag{9.16}$$
$$-\int_{\mathbf{V}} p\left(\nabla.\mathbf{u}\right)dV+\left[\int_V \rho T\dot{s}_{Irr}dV-\int_V \rho\left(\frac{T_R-T}{T_R}\right)\dot{q}dV\right]=-\dot{L}_e$$

La (9.16) coincide con la (8.30) ponendo l'eguaglianza:

$$\dot{R}=\left[\int_V \rho T\dot{s}_{Irr}dV-\int_V \rho\left(\frac{T_R-T}{T_R}\right)\dot{q}dV\right] \tag{9.17}$$

10. EQUAZIONE BEM: FORME STAZIONARIE

Nei casi stazionari, i termini sotto derivata nella (8.30) si annullano. Si hanno quindi le forme stazionarie seguenti:

Equazione BEM stazionaria per sistemi a più correnti

$$\sum_{Nout} Q_{m,out}\left(\alpha\frac{W^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}\right)_{out}-\sum_{Nin} Q_{m,in}\left(\alpha\frac{W^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}\right)_{in}- \\ -\int_V p(\nabla.\mathbf{u})dV+\dot{R}=-\dot{L}_e \tag{10.1}$$

Nella (10.1) i primi due termini rappresentano rispettivamente i flussi attraverso le N_{out} correnti in uscita e le N_{in} correnti in ingresso.

Equazione BEM stazionaria per sistemi a due correnti, forma generale

Per sistemi stazionari ad una sola sezione di ingresso e una sola sezione di uscita la (10.1) può essere riscritta come:

$$\left(\alpha_2\frac{W_2^2}{2}+gz_2+\frac{p_2}{\rho_2}\right)-\left(\alpha_1\frac{W_1^2}{2}+gz_1+\frac{p_1}{\rho_1}\right)-\frac{1}{Q_m}\int_V p(\nabla.\mathbf{u})dV+R=-l_e \tag{10.2}$$

con:

$$Q_{m,2}=Q_{m,1}=Q_m \tag{10.3}$$

$$R=\frac{\dot{R}}{Q_m} \tag{10.4}$$

$$l_e=\frac{\dot{L}_e}{Q_m} \tag{10.5}$$

Si noti che la (10.2) coincide con la (4.1) nel caso di fluido incomprimibile $(\nabla.\mathbf{u}=0, \rho_1=\rho_2=\rho)$.

Equazione BEM stazionaria per sistemi a tubo di flusso monodimensionale

Un ulteriore sviluppo della (10.2) richiede che si consideri un tubo di flusso monodimensionale limitato alle estremità dalle sezioni (1) e (2), cioè una regione nella quale sia sempre possibile individuare sezioni trasversali alla direzione principale del moto del fluido, lungo le quali la pressione e le altre proprietà termodinamiche si possano assumere uniformemente distribuite. Tali quantità possono ovviamente variare nella direzione del moto individuata dalla linea baricentrica ξ a versore $\boldsymbol{\xi}$.

Sotto tali ipotesi, in particolare, volume specifico/densità e pressione sono funzione della sola coordinata ξ, così come le loro derivate.

Utilizzando l'equazione di continuità e tenendo conto della stazionarietà del moto, come già visto in nella (9.5), si ha:

$$\nabla . \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{v}\frac{Dv}{Dt} = \rho\frac{Dv}{Dt} = \rho\mathbf{u}.\nabla v \qquad (10.6)$$

Il termine integrale nella (10.2) può quindi essere riscritto in termini di volume specifico, come segue:

$$-\int_V p(\nabla . \mathbf{u})dV = -\int_V p\rho(\mathbf{u}.\nabla v)dV \qquad (10.7)$$

Tenendo conto delle ipotesi di monodimensionalità di cui sopra, si ha ancora:

$$-\int_V \frac{p}{v}(\mathbf{u}.\nabla v)dV = -\iint_{\xi\, S} \frac{p}{v} u_\xi \frac{dv}{d\xi} d\xi\, dS = -\iint_{\xi\, S} \frac{p}{v}(\mathbf{u}.\mathbf{n})\frac{dv}{d\xi} d\xi\, dS =$$

$$= -\int_1^2 (\rho SW)pdv = -Q_m \int_1^2 pdv \qquad (10.8)$$

Sostituendo nella (10.2) si ottiene:

$$\left(\alpha_2 \frac{W_2^2}{2} + gz_2 + p_2 v_2\right) - \left(\alpha_1 \frac{W_1^2}{2} + gz_1 + p_1 v_1\right) - \int_1^2 pdv + R = -l_e \qquad (10.9)$$

Ricordando che:

$$p_2 v_2 - p_1 v_1 - \int_1^2 pdv = \int_1^2 vdp \qquad (10.10)$$

si ha infine:

$$\alpha_2 \frac{W_2^2}{2} - \alpha_1 \frac{W_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \int_1^2 vdp + R = -l_e \qquad (10.11)$$

La (10.11) coincide formalmente con la (4.1). La derivazione mostra che la forma (4.1) non ha carattere generale, ma è invece applicabile a rigore solo per sistemi o parti di sistema in cui è possibile individuare un tubo di flusso monodimensionale.
Resta aperto il problema della descrizione termodinamica del processo eseguito tra 1 e 2. Tale processo deve ovviamente essere quasi-statico, ma la determinazione della sua equazione, specie nei casi di fluido reale, ove R non è nullo, presenta grosse difficoltà. Anche una volta fissati gli stati 1 e 2, la quantità integrale ed il termine R non sono misurabili separatamente; la ripartizione della loro somma nei due contributi resta quindi largamente arbitraria. Si veda in proposito la discussione offerta in [8] (pp. 55-56).

La riduzione del termine R nella forma di integrale di linea, ritrovabile in alcune formulazioni della (4.1) quale quella presentata in [8] (p.218), già richiamata al § 6, offre ulteriori difficoltà logiche.

Dalla (9.17), per sistemi stazionari a due correnti, si ha:

$$R = \frac{\dot{R}}{Q_m} = \frac{1}{Q_m}\left[\int_V \rho T \dot{s}_{Irr} dV - \int_V \rho\left(\frac{T_R - T}{T_R}\right)\dot{q} dV\right] \qquad (10.12)$$

Le ipotesi di monodimensionalità già assunte per il tubo di flusso implicano che, avendo assunto uniformi sezione per sezione la densità e la pressione, anche la temperatura T sia uniforme. La temperatura T_R rappresenta in questo caso la temperatura alla parete del tubo di flusso, uniforme sul perimetro di ciascuna sezione trasversale del tubo di flusso stesso. Ciò equivale a postulare che il fluido sia infinitamente conduttivo in direzione ortogonale al moto, concentrando le irreversibilità termiche alla frontiera perimetrale. E' quasi superfluo precisare che il fluido deve essere considerato non conduttivo in direzione assiale.

Sotto queste ipotesi, $\dot{q}$ diviene funzione della sola ascissa corrente ξ, e, intendendo il rapporto $\frac{\delta q}{dt}$ nella definizione (9.11) come derivata sostanziale:

$$\dot{q}(\xi) = \frac{\delta q}{dt} = \frac{Dq}{Dt} = \mathbf{u}.\nabla q = u\frac{dq}{d\xi} \qquad (10.13)$$

da cui:

$$\begin{aligned}\int_V \rho\left[\left(\frac{T_R - T}{T_R}\right)\dot{q}\right] dV &= \iint_{\xi\, S} \rho u\left[\left(\frac{T_R - T}{T_R}\right)\frac{dq}{d\xi}\right] dS d\xi = \\ &= \left(\int_S \rho u dS\right)\int_\xi \left[\left(\frac{T_R - T}{T_R}\right)\frac{dq}{d\xi}\right] d\xi = Q_m \int_1^2 \left(\frac{T_R - T}{T_R}\right) dq\end{aligned} \qquad (10.14)$$

Ulteriori considerazioni sono necessarie per poter assumere che anche la frazione meccanica delle irreversibilità e quindi l'intera quantità $\dot{s}_{Irr}$, sia funzione della sola ascissa corrente ξ.
Infatti, in termini generali, si deve ammettere che la velocità del fluido vari, oltre che in direzione assiale, anche lungo la sezione del tubo di flusso considerato ($\alpha \neq 1$). Pertanto, la distribuzione della produzione meccanica di entropia non può in generale essere assunta uniforme sulla generica sezione S del tubo di flusso e non è quindi funzione della sola coordinata ξ. Se tuttavia si considera l'assunzione di uniformità di T, p, ρ, sulla sezione, l'ipotesi di uniformità di $\dot{s}_{Irr}$ risulta accettabile, in quanto corrisponde all'idea che la conduttività infinita assicuri istantaneamente la redistribuzione sulla sezione S del calore ivi generato per irreversibilità meccanica, assicurando l'equilibrio termodinamico sulla sezione stessa; $\dot{s}_{Irr}$, assunto pari al proprio valor medio su S è ora funzione della sola ξ.

In analogia a quanto fatto per ricavare la (10.14), si procede ora interpretando il rapporto $\frac{\delta s_{Irr}}{dt}$ nella (9.12) come derivata sostanziale:

$$\dot{s}_{Irr} = \frac{\delta s_{Irr}}{dt} = \frac{Ds_{Irr}}{Dt} = \mathbf{u}.\nabla s_{Irr} = u\frac{ds_{Irr}}{d\xi} \tag{10.15}$$

$$\begin{aligned} &\int_V \rho T\dot{s}_{Irr} dV = \iint_{\xi\, S} \rho T\dot{s}_{Irr} dS d\xi = \\ &= \left(\int_S \rho u dS\right)\int_\xi T\frac{ds_{Irr}}{d\xi}d\xi = Q_m\int_1^2 T ds_{Irr} \end{aligned} \tag{10.16}$$

La (10.12) viene quindi riscritta come:

$$R = \int_1^2 T ds_{Irr} - \int_1^2 \left(\frac{T_R - T}{T_R}\right) dq \tag{10.17}$$

L'espressione (10.17) per le perdite di carico si può semplificare ulteriormente, aggiungendo alle ipotesi precedenti una delle due seguenti condizioni:

- adiabaticità ($dq = 0$);
- reversibilità degli scambi di calore, consistente nell'imporre l'identità tra la temperatura del fluido e la temperatura del perimetro $\left(T_R \equiv T\right)$ ad ogni sezione del tubo di flusso.

In entrambi i casi il secondo termine s.m. della (10.17) si annulla e le irreversibilità presenti sono esclusivamente di origine meccanica:

$$R = \int_1^2 T ds_{Irr} \tag{10.18}$$

11. PERDITE DI ENERGIA MECCANICA E IRREVERSIBILITA'

Le espressioni generali (8.29) e (9.17) per la potenza dissipata entro il volume di controllo, offrono l'opportunità di approfondire la relazione esistente tra produzione irreversibile di entropia, degradazione di energia meccanica e irreversibilità termiche per un fluido in moto.

Eguagliando i secondi membri delle (8.29) e (9.17) e riordinando, si ha:

$$\int_V \rho T \dot{s}_{Irr} dV = \int_V \boldsymbol{\tau} : \{\nabla \mathbf{u}\} dV + \int_V \rho \left(\frac{T_R - T}{T_R} \right) \dot{q} dV \qquad (11.1)$$

Si può inoltre dimostrare (vedi anche [14] (p.35)) che, in assenza sia di effetti generativi, dovuti a effetti elettrici, magnetici o chimici, che di scambi termici radiativi, ed assumendo inoltre costante la conduttività termica del fluido λ , si può scrivere:

$$\int_V \rho \left(\frac{T_R - T}{T_R} \right) \dot{q} dV = \int_V \lambda \frac{(\nabla T)^2}{T} dV \qquad (11.2)$$

Dalle (11.1) e (11.2) deriva che:

$$\rho T \dot{s}_{Irr} = \boldsymbol{\tau} : \{\nabla \mathbf{u}\} + \lambda \frac{(\nabla T)^2}{T} \qquad (11.3)$$

La (11.3) esprime il fatto che la potenza per unità di volume complessivamente resa inutilizzabile in un fluido in moto, è somma dei contributi dovuti alle dissipazioni viscose ed ad effetti irreversibili di conduzione entro il fluido.
Una analoga lettura in termini di velocità di produzione entropica per unità di massa si ha dividendo la (11.3) per T:

$$\rho \dot{s}_{Irr} = \frac{\boldsymbol{\tau} : \{\nabla \mathbf{u}\}}{T} + \lambda \frac{(\nabla T)^2}{T^2} \qquad (11.4)$$

Le (11.3), (11.4), da un lato chiariscono il nesso tra i fenomeni dissipativi meccanici e termici e la produzione irreversibile di entropia, dall'altro offrono uno strumento diretto per il calcolo della produzione entropica.
L'integrazione sul volume della (11.4) produce l'espressione della velocità di produzione irreversibile di entropia entro il sistema considerato:

$$\int_V \rho \dot{s}_{Irr} dV = \int_V \frac{\boldsymbol{\tau} : \{\nabla \mathbf{u}\}}{T} dV + \int_V \lambda \frac{(\nabla T)^2}{T^2} dV \qquad (11.5)$$

Il termine a p.m. della (11.5) compare nell'equazione integrale di bilancio dell'entropia per sistemi aperti.

12. CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

La revisione critica delle derivazioni e delle formulazioni dell'equazione integrale di bilancio dell'energia meccanica mette in luce che le trattazioni comunemente utilizzate per derivare l'equazione nelle sue forme stazionarie sono tutte sostanzialmente insoddisfacenti.
In particolare, si nota che le derivazioni di tipo meccanico si riferiscono ai soli sistemi a tubo di flusso monodimensionale, per i quali risulta impossibile l'inclusione di macchine per il trasferimento esterno di lavoro. Spesso, anzi, le procedure dimostrative si basano sull'ipotesi di fluido ideale; la loro estensione al caso di fluido reale si esegue quindi per via intuitiva, o basandosi su formulazioni alternative, di tipo termodinamico.
Si osserva poi che queste derivazioni semplificate non partono, come ci si potrebbe aspettare, da una forma differenziale dell'equazione dell'energia meccanica, ma, più o meno direttamente, tutte si basano sull'equazione di quantità di moto che, proiettata lungo l'asse del tubo di flusso, viene poi integrata direttamente tra gli estremi dello stesso. Nel caso di fluido ideale l'operazione corrisponde alla proiezione dell'equazione di Eulero e non è in grado di produrre i coefficienti di correzione dell'energia cinetica alle sezioni di ingresso ed uscita. Nel caso di fluido reale, la procedura equivale invece alla proiezione dell'equazione di Navier-Stokes e produce un'espressione non generale della perdita di carico, in quanto valida solo per sistemi a tubo di flusso monodimensionale.

Le derivazioni che si basano sull'eliminazione dei termini di calore e di entalpia dall'equazione integrale di bilancio dell'energia portano a risultati più convincenti e completi, nel caso di fluidi incomprimibili. Nel caso di fluidi a densità variabile, tuttavia, l'introduzione del termine integrale è fonte di confusione in quanto non viene mai esplicitato il fatto che l'esistenza dell'integrale di pressione implica l'ipotesi di sistema a tubo di flusso monodimensionale. Nelle derivazioni termodinamiche, infine, il significato termodinamico delle perdite di carico e la loro relazione con la produzione irreversibile di entropia non sono mai trattati in modo chiaro e convincente.

Le ambiguità e le incertezze insite nelle tradizionali formulazioni e derivazioni dell'equazione di bilancio stazionaria a due correnti possono essere completamente risolte attraverso approcci più sistematici e rigorosi che, partendo dall'integrazione diretta sul volume di controllo dell'equazione differenziale dell'energia meccanica o, in alternativa, dalla forma più generale dell'equazione di bilancio dell'energia per sistemi aperti, conducono alla forma completa non stazionaria dell'equazione di bilancio, senza alcuna limitazione relativamente alla deformabilità del sistema o al numero di correnti.
Da questa, per successive graduali semplificazioni, si possono derivare le forme convenzionali dell'equazione conservando piena coscienza delle limitazioni che l'introduzione di nuove ipotesi viene ad imporre alla validità della formulazione che viene prodotta.

La procedura di derivazione di tipo meccanico, in particolare, consente di ricavare l'espressione corretta delle perdite di energia meccanica entro il sistema considerato. Essa mette inoltre in evidenza che il lavoro meccanico esterno svolto dal sistema può essere trasferito non solo per azione della pressione (di solito si tratta in questo caso di lavoro dovuto alla presenza di macchine) ma anche per azione della tensione viscosa. In altri termini l'equazione è applicabile utilmente anche al caso di moti di trascinamento viscoso, stazionari o non stazionari. Dalla derivazione per via termodinamica si può invece risalire ad una corretta e compiuta interpretazione della relazione tra perdite di carico ed irreversibilità termodinamiche.

Questo ultimo punto può avere grande rilievo applicativo, con particolare riferimento alle soluzioni CFD, infatti gli integrali di perdita di carico e di produzione irreversibile di entropia sono calcolabili a valle della risoluzione dei campi di velocità e temperatura.

L'equazione integrale di bilancio dell'energia meccanica o, in alternativa, l'equazione integrale di bilancio dell'entropia, si prestano quindi ad essere utilmente impiegate per il controllo della coerenza della soluzione numerica con i principi di conservazione.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] R.B. Bird, W.E. Stewart, E.N. Lightfoot, *Fenomeni di Trasporto*, Ed. Ambrosiana. Milano, 1970.

[2] R.B. Bird, *The equations of change and the macroscopic mass, momentum, and energy balances*, Chem. Eng. Sci., 6, 1957, 123-131.

[3] R.L. Panton, *Incompressible Flow*, 3rd ed., J. Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2005.

[4] E. Foà, *Lezioni di Fisica Tecnica*, Scuola di Ingegneria di Bologna, Bologna, 1928.

[5] W.F. Hughes, J.A. Brighton, *Theory and Problems of Fluid Dynamics*, McGrow-Hill Book Co., NY, 1967.

[6] A. Giulianini, *Fondamenti di Fisica Tecnica*, Editrice Patron, Bologna, 1975

[7] F.W. Schmidt, R.E. Henderson, C.H, Wolgemuth, *Introduction to Thermal Sciences*, J.Wiley&Sons, NY, 1984.

[8] A. Cocchi, *Elementi di Termofisica Generale ed Applicata*, Soc. Ed. sculapio, Bologna, 1990.

[9] R.W. Fox, A.T. McDonald, *Introduction to Fluid Mechanics*, 4th Ed., J.Wiley&Sons, NY, 1994.

[10] G. Comini, *Lezioni di Termodinamica Applicata*, 2° Ed., SGE Padova, 1998.

[11] M.C. Potter, D.C. Wiggert, *Mechanics of Fluids*, 3rd Ed., Thomson Learning, Inc., Pacific Grove, CA, 2002.

[12] Y.A. Cengel, J.M. Cimbala, *Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications*, McGrow-Hill, Boston, 2006.

[13] V.L. Streeter, E.B. Wylie, *Fluid Mechanics*, !st SI Ed., McGrow-Hill Book Co., Singapore, 1983.

[14] G.K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1967.

[15] E. Zanchini, *Termodinamica*, Pitagora Editrice Bologna, Bologna, 1992.